

Mathematische Modellierung mit Differentialgleichungen II

Alan Rendall

1 Einleitung

1.1 Hyperbolische Erhaltungsgleichungen

Das zentrale Thema dieser Vorlesung sind hyperbolische Systeme von Erhaltungsgleichungen. Diese werden eingesetzt, um viele verschiedene Phänomene zu beschreiben. In manchen Fällen entstehen sie durch Näherungen, wo dissipative Effekte vernachlässigt werden. Der Vorteil ist, daß die Modelle ohne Dissipation wesentlich einfacher sind. Der Nachteil ist, daß man durch die Näherung gewisse Informationen verliert und es ist wichtig zu verstehen, unter welchen Bedingungen man trotzdem ein hinreichend gutes Modell der gegebenen Situation bekommt. Im folgenden wird versucht, so weit wie möglich mit den hyperbolischen Modellen zu arbeiten, aber es wird trotzdem notwendig sein, einige Aspekte der entsprechenden dissipativen Modelle zu studieren. Dazu wird die Theorie von parabolischen Gleichungen benötigt.

In der Theorie der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen spielt die Hydrodynamik eine grosse Rolle. Auf der einen Seite liegen viele Anwendungen der Theorie in diesem Bereich. Auf der anderen Seite sind viele Aspekte der mathematischen Theorie dieser Gleichungen in Zusammenhang mit der Hydrodynamik entwickelt worden. Aus diesem Grund werden die Euler-Gleichungen und ihr dissipatives Gegenstück, die Navier-Stokes-Gleichungen, im folgenden einen zentralen Platz einnehmen.

Jetzt werden wir die Grundbegriffe der Theorie einführen.

Definition Ein *System von Erhaltungsgleichungen* ist ein System von partiellen Differentialgleichungen der Form:

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_i (F^i(u)) = 0 \quad (1)$$

Hier ist u eine Abbildung von einer offenen Teilmenge von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ nach \mathbf{R}^k und F^i Abbildungen von einer offenen Teilmenge G des \mathbf{R}^k nach \mathbf{R}^k . Eine globale Annahme in dieser Vorlesung, sofern das Gegenteil nicht explizit gesagt wird, ist daß die Koeffizienten der Gleichungen, also in diesem Fall die Abbildungen F^i glatt (C^∞) sind. Im folgenden bezeichnet t normalerweise eine reelle Zahl (Zeit) und x einen Punkt des \mathbf{R}^n (räumlichen Punkt). Ein Punkt des Raumes

wo die Lösungen des Systems ihre Werte annimmt, wird mit u bezeichnet. Die Lösung selbst wird mit $u(t, x)$ oder auch manchmal mit u bezeichnet. Sei A^i die Ableitung von F^i nach u . Das System (1) kann mit Hilfe der Kettenregel in der alternativen Form

$$\partial_t u + A^i(u) \partial_i u = 0 \quad (2)$$

geschrieben werden. Hier wird die Summationskonvention benutzt. So lange es sich um klassische Lösungen handelt, d.h. um Lösungen $u(t, x)$, die stetig differenzierbar sind, sind (1) und (2) äquivalent. Sobald aber Lösungen mit weniger Regularität betrachtet werden, ist dies nicht mehr der Fall. Wir werden sehen, daß die Betrachtung unstetiger Lösungen nicht zu vermeiden ist.

Bei glatten Lösungen gibt es auch die Möglichkeit, u als Unbekannte durch $v = \Phi(u)$ mit einer glatten Abbildung Φ zu ersetzen. Wir nehmen an, daß Φ eine glatte inverse Abbildung Ψ besitzt, so daß $u = \Psi(v)$. Die Funktion v erfüllt die Gleichung $\partial_t v + \tilde{A}^i(v) \partial_i v = 0$, mit $\tilde{A}^i(v) = (D\Psi(v))^{-1} A^i(\Psi(v)) D\Psi(v)$. Diese Transformation der Unbekannten führt zu einer Ähnlichkeitstransformation der Matrizen $A^i(u)$.

Eine Verallgemeinerung des Systems (1) ist das System von Bilanzgleichungen

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_i (F^i(u)) = Q(u) \quad (3)$$

Auch dieses System hat natürlich eine Formulierung analog zu (2), die für klassische Lösungen mit dem ursprünglichen System äquivalent ist. Viele Begriffe, die für Erhaltungsgleichungen nützlich sind, können auch für Bilanzgleichungen eingeführt werden. Im folgenden werden wir im allgemeinen nicht explizit auf solche Fälle verweisen.

Es ist interessant zu fragen, inwiefern, im Rahmen von klassischen Lösungen, das System (2) allgemeiner ist als (1). Wir betrachten den eindimensionalen Fall ($n = 1$); der allgemeine Fall ist ähnlich. Wenn wir die Komponenten der Unbekannten explizit schreiben wird (2) zu

$$\partial_t u^I + A_J^I \partial_x u^J = 0 \quad (4)$$

Eine notwendige and hinreichende Bedingung, daß dieses System als System von Erhaltungsgleichungen für die Unbekannten u^I geschrieben werden kann, zumindest lokal im Raum der Unbekannten, wird durch das Poincaré-Lemma gegeben. Die Bedingung ist, daß:

$$\partial A_J^I / \partial u^K = \partial A_K^I / \partial u^J \quad (5)$$

Diese Bedingung ist bei einer skalaren Gleichung trivial erfüllt, aber für $k > 1$ im allgemeinen nicht. Wenn die Bedingung nicht erfüllt ist kann die Gleichung auch nicht in die Form eines Systems von Bilanzgleichungen für u^I gebracht werden.

Es gibt zwei Fälle in denen Systeme von Erhaltungsgleichungen besonders gut verstanden sind, nämlich die Fälle $k = 1$ (Fall einer skalaren Gleichung) und $n = 1$ (Fall einer Raumdimension). Deshalb wird sich ein Großteil dieser Vorlesung mit diesen zwei Fällen beschäftigen.

Sei ξ ein nichtverschwindender Vektor im \mathbf{R}^n mit Komponenten ξ_i . Im System (2) ist $\xi_i A^i(u)$ für eine feste Wahl von ξ eine Funktion auf G deren Werte k mal k Matrizen sind. Seien $\lambda_1(\xi, u), \dots, \lambda_k(\xi, u)$ die Eigenwerte von $\xi_i A^i(u)$. Wir nehmen an, daß folgende Strukturbedingung erfüllt ist:

Strukturbedingung (*). Die Eigenwerte von $\xi_i A^i(u)$ sind reell und können so geordnet werden, daß sie glatt von ξ und u abhängen. Es gibt für alle $u \in G$ und $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ein vollständiges System von Eigenvektoren. Diese Eigenvektoren können so gewählt werden, daß sie glatt von ξ und u abhängen.

Mit anderen Worten, die Strukturbedingung (*) sagt, daß die Matrix $A(\xi, u)$ diagonalisierbar ist, mit reellen Eigenwerten, und daß die Diagonalisierung glatt durchgeführt werden kann. Diese Bedingung bleibt unter einer Transformation der Form $v = \Phi(u)$ bestehen, da diese, wie schon erwähnt, zu einer Ähnlichkeitstransformation der Matrizen $\xi_i A^i$ führt. Wie später gezeigt wird, hat (*) damit zu tun, daß das Anfangswertproblem für das System (2) lösbar sein soll. Eine Basis aus Eigenvektoren wird mit $r_i(\xi, u)$ bezeichnet. Diese Basis ist im allgemeinen nicht eindeutig. Sei $l_i(\xi, u)$ die dazu duale Basis, so daß $r_i(l_j) = \delta_{ij}$. Ein wichtiger Spezialfall ist der, wo die Eigenwerte verschieden sind. Dann ist $A(\xi, u)$ automatisch diagonalisierbar und wenn $A(\xi, u)$ glatt von u abhängt können die $r_i(\xi, u)$ auch als glatte Funktionen ihrer Argumente gewählt werden. Wenn die Eigenwerte verschieden sind, heißt das System (2) strikt hyperbolisch. Systeme, die die Strukturbedingung (*) erfüllen, heißen stark hyperbolisch. Mann sollte beachten, daß das Wort 'hyperbolisch' in verschiedenen Zusammenhängen mit vielen eng verwandten, aber nicht ganz äquivalenten, Bedeutungen verwendet wird. Es empfiehlt sich also, wenn jemand dieses Wort benutzt, zu fragen, in welchem Sinne er es meint.

Im eindimensionalen Fall ($n = 1$) ist ξ einfach eine nichtverschwindende reelle Zahl, und die Wahl dieser Zahl hat als Folge eine Skalierung der Eigenwerte und keine Änderung der Eigenvektoren. Deshalb enthält die Matrix für eine feste Wahl von ξ die gesamte Information und wir benutzen die Abkürzung $A(u) = A(1, u) = A_1(u)$.

Sei $u(t, x)$ eine stetig differenzierbare Lösung des Systems (1) auf $I \times \mathbf{R}^n$, wo I ein Intervall ist. Nehmen wir an, daß es ein Kompaktum K im \mathbf{R}^n gibt derart, daß der Träger von u in $I \times K$ enthalten ist. In diesem Fall sagen wir, daß u räumlich kompakten Träger hat. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} d/dt \left(\int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) dx \right) &= \int \partial_t u(t, x) dx \\ &= - \int \sum_{i=1}^n \partial_i (F^i(u(t, x))) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das heißt, die Integrale der Komponenten von u sind zeitunabhängig, sie sind erhalten. Daher kommt der Name Erhaltungsgleichungen. Man könnte diesen Namen auch für andere Gleichungen benutzen, die zu Erhaltungsgrößen führen. In dieser Vorlesung wird aber die Bezeichnung nur für Gleichungen der Form (1), wo die Matrix $D_u F$ die Strukturbedingung (*) erfüllt, benutzt. Da diese Eigenschaften mit der Hyperbolizität zu tun haben, könnte man diese Systeme auch als hyperbolische Systeme von Erhaltungsgleichungen bezeichnen, worauf wir aber meistens verzichten. Im Falle eines Systems von Bilanzgleichungen bekommen wir die allgemeinere Beziehung

$$d/dt \left(\int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) dx \right) = \int_{\mathbf{R}^n} Q(u(t, x)) dx \quad (6)$$

Die Erhaltungsgrößen werden durch Größen ersetzt, deren Veränderung durch die Quelle $Q(u)$ bestimmt wird.

1.2 Erste Beispiele

In diesem Abschnitt werden einige Systeme von Differentialgleichungen vorgestellt, die im folgenden wichtig sein werden.

Beispiel 1 Die Burgers-Gleichung. Dies ist das einfachste nichttriviale Beispiel überhaupt auf diesem Gebiet und wurde schon in der Vorlesung ‘Mathematische Modellierung mit Differentialgleichungen I’ (ab jetzt als MMDI abgekürzt) besprochen. Die Gleichung ist

$$\partial_t u + u \partial_x u = \epsilon \partial_x^2 u \quad (7)$$

mit $\epsilon \geq 0$ eine Konstante. Diese Gleichung ist im Falle $\epsilon > 0$ dissipativ und nur für $\epsilon = 0$ eine hyperbolische Erhaltungsgleichung. Die Beziehung zwischen diesen beiden Fällen ist typisch für das ganze Gebiet. Die Gleichung (7) ist für $\epsilon = 0$ von der Form (2). Wie schon erwähnt ist es notwendig für den Umgang mit unstetigen Lösungen die Gleichung in der Form (1) zu schreiben. Für klassische Lösungen sind die Gleichungen

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad (8)$$

und

$$\partial_t (u^2) + \partial_x \left(\frac{2}{3} u^3 \right) = 0 \quad (9)$$

äquivalent. Für unstetige Lösungen ist dies nicht mehr der Fall, wie wir später sehen werden. Es ist die Gleichung (8), die sich mit dem Namen Burgers-Gleichung schmücken darf.

In MMDI wurde gezeigt, wie man die Burgers-Gleichung benutzen kann, um Staus auf der Autobahn zu beschreiben. Wir werden unten sehen, daß sie auch in der Hydrodynamik vorkommt.

Beispiel 2 Die allgemeine skalare Erhaltungsgleichung. Hiermit ist nichts anderes gemeint als der Fall $k = 1$ von (1). Die Strukturbedingung (*) ist in diesem Fall automatisch erfüllt. Eine wichtige Teilklasse wird durch die Konvexitätsbedingung $F'' > 0$ definiert. Dies soll nicht heißen, dass der nichtkonvexe Fall nicht auch von Interesse ist

Beispiel 3 Die Buckley-Leverett-Gleichung. Diese Gleichung spielt eine Rolle in der Erdölgewinnung. Wenn nach Öl gebohrt wird, treibt der Druck einen Teil des Öls nach oben, aber ein Teil bleibt zurück. Um diesen Teil auch noch zu gewinnen wird Wasser eingepumpt. Das Ergebnis ist eine Mischung der beiden Flüssigkeiten. Die Unbekannte u in der Buckley-Leverett-Gleichung ist der Wasseranteil in der Mischung. ($u = 1$ bedeutet nur Wasser, $u = 0$ nur Öl.) Die Gleichung ist eine skalare Erhaltungsgleichung der Form (1) wo aber die Funktion F nicht konvex ist. Sie wird durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 + a(1-u)^2} \quad (10)$$

für eine Konstante a . Wegen der Interpretation darf u nur Werte zwischen Null und Eins annehmen.

Beispiel 4 Wir gehen von folgender nichtlinearer Wellengleichung aus:

$$\partial_t^2 u = \partial_x(k(u)\partial_x u) \quad (11)$$

Jetzt werden neue Variable $v = \partial_t u$ und $w = \partial_x u$ eingeführt. Das Ergebnis ist das System:

$$\partial_t u - v = 0 \quad (12)$$

$$\partial_t v - \partial_x(k(u)w) = 0$$

$$\partial_t w - \partial_x v = 0 \quad (13)$$

Um die Strukturbedingung (*) zu überprüfen, müssen wir die relevanten Eigenwerte bestimmen. Das Ergebnis ist, daß ein Eigenwert verschwindet und die anderen die Gleichung $\lambda^2 = k$ erfüllen. Um reelle Eigenwerte zu erhalten müssen wir $k \geq 0$ verlangen. Ausserdem ist im Falle $k = 0$ die Matrix normalerweise nicht diagonalisierbar. Deshalb werden wir $k > 0$ verlangen. Unter dieser Bedingung ist das System (12) strikt hyperbolisch. Diese Bedingung hat natürlich auch mit der Hyperbolizität der Gleichung zweiter Ordnung zu tun: z. B. für $k = 1$ bekommen wir die normale Wellengleichung und für $k = -1$ die Laplace-Gleichung, die einen ganz anderen (elliptischen) Charakter hat. Die nichtlineare Wellengleichung kann als Modell für eine schwingende Saite benutzt werden (vgl. [10], S. 420).

Beispiel 5 Eine dissipative hyperbolische Gleichung. Eine Gleichung heißt dissipativ, wenn es ein Funktional gibt, das bei Lösungen der Gleichung niemals abnimmt und manchmal zunimmt oder ein Funktional, das niemals zunimmt

und manchmal abnimmt. Z. B. ist, so lange $\epsilon > 0$ die L^2 -Norm ein solches Funktional für die Burgers-Gleichung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int u^2(t, x) dx &= 2 \int u \partial_t u dx \\ &= 2 \int -u^2 \partial_x u + \epsilon u \partial_x^2 u dx \\ &= -2 \int \epsilon (\partial_x u)^2 dx \end{aligned}$$

Für eine glatte Lösung mit räumlich kompaktem Träger nimmt die L^2 -Norm immer ab, abgesehen vom Spezialfall $u = 0$. Dissipation muß nicht immer mit Termen höherer Ordnung zu tun haben. Um dies zu zeigen, betrachten wir die hyperbolische Bilanzgleichung

$$\partial_t u + u \partial_x u = -u \tag{14}$$

In diesem Fall ist die L^2 -Norm auch monoton.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int u^2(t, x) dx &= 2 \int u \partial_t u dx \\ &= 2 \int -u^2 \partial_x u - u^2 dx \\ &= -2 \int u^2 dx \end{aligned}$$

Beispiel 6 Das Carleman-Modell. In dieser Vorlesung wird viel über Beschreibungen der Materie durch eine Flüssigkeit gesagt. Eine andere Möglichkeit, Materie zu beschreiben, sind die kinetischen Modelle, z. B. die Boltzmann-Gleichung. Hier wird die Materie durch eine Ansammlung von Teilchen beschrieben, die statistisch in ihrer Verteilung bezüglich Ort und Geschwindigkeit behandelt werden. Die fundamentale Unbekannte ist eine Verteilungsfunktion $f(t, x, u)$. Da diese Funktion eine Teilchendichte beschreibt, muß sie nichtnegativ sein. Da die Boltzmann-Gleichung selbst so schwer zu behandeln ist, werden oft vereinfachte Modelle betrachtet, wo nur diskrete Möglichkeiten für die Geschwindigkeit zugelassen werden. Diese führen auf Systeme von Bilanzgleichungen, weshalb sie an dieser Stelle erwähnt werden.

Das einfachste diskrete Modell für die Boltzmann-Gleichung ist das Carleman-Modell. Dies ist ein Modell in einer Raumdimension, und die Geschwindigkeit der Teilchen darf nur die diskreten Werte ± 1 annehmen. Wenn die Dichten der zwei Teilchensorten f_1 und f_2 sind, lauten die Gleichungen des Modells:

$$\begin{aligned} \partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= f_2^2 - f_1^2 \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= f_1^2 - f_2^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichungen definieren offenbar ein strikt hyperbolisches System von Bilanzgleichungen. Das System ist semilinear, d.h. die ersten Ableitungen kommen

linear vor. Dieses System ist dissipativ, wegen der Existenz der Boltzmann-Entropie $-\int f_1 \log f_1 + f_2 \log f_2 dx$. Um technische Komplikationen zu vermeiden, nehmen wir in der folgenden Rechnung an, daß die Lösung f strikt positiv ist.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int f_1 \log f_1 + f_2 \log f_2 dx \right) \\ &= \int (1 + \log f_1)(-\partial_x f_1 + f_2^2 - f_1^2) + (1 + \log f_2)(\partial_x f_2 - f_2^2 + f_1^2) dx \\ &= \int (f_2^2 - f_1^2)(\log f_1 - \log f_2) - \log f_1 \partial_x f_1 + \log f_2 \partial_x f_2 dx \\ &= \int (f_2^2 - f_1^2)(\log f_1 - \log f_2) dx \end{aligned} \quad (16)$$

Der letzte Ausdruck ist nichtpositiv und verschwindet nur wenn f_1 und f_2 identisch sind. In dem Fall folgt aus (15), daß sie konstant ist.

1.3 Die Navier-Stokes- und Euler-Gleichungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene hydrodynamische Modelle eingeführt. Wir betrachten eine Flüssigkeit im dreidimensionalen euklidischen Raum. Wir beschränken uns auf die sogenannten Newtonschen Flüssigkeiten, wo es eine lineare Beziehung zwischen Scherung und Spannung gibt. Zuerst werden die Gleichungen aufgeschrieben und dann die Bedeutung der Unbekannten erklärt. Mehr Informationen über die Herleitung der Gleichungen findet man im ersten Kapitel von [7]. Die Massenerhaltung ist:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (17)$$

oder, in Koordinaten,

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho u^i) = 0 \quad (18)$$

Die Impulserhaltung ist

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} u) - \mu\Delta u + \nabla p = 0 \quad (19)$$

In Koordinaten haben wir

$$\partial_t(\rho u^i) + \partial_j(\rho u^i u^j) - \lambda \partial_k u^k \delta^{ij} + \mu(\delta^{ik} \partial_k u^j + \delta^{jk} \partial_k u^i) + p \delta^{ij} = 0 \quad (20)$$

Die Energieerhaltung ist

$$\partial_t \left\{ \rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) \right\} + \operatorname{div} \left\{ u \left[\rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) + p \right] \right\} = \operatorname{div}(\tau \cdot u) - \operatorname{div} q \quad (21)$$

Jetzt zur Erklärung der Variablen. Die Massendichte der Flüssigkeit wird mit ρ bezeichnet. Sie wird als nichtnegativ angenommen und meistens sogar als strikt positiv. Der Fall, wo ρ verschwindet, ist der Fall eines Vakuums und führt

zu erheblichen Schwierigkeiten. Dieser Fall wird, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, in dieser Vorlesung nicht behandelt. Das Vektorfeld u ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit. Der Druck der Flüssigkeit wird mit p bezeichnet. Der Druck soll nichtnegativ sein. Die Konstanten λ und μ beschreiben die Viskosität. Es wird angenommen, daß $\mu \geq 0$ und $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$. Die Größe e ist die spezifische innere Energie (d.h. innere Energie pro Masseneinheit). Sie ist positiv. Das Tensorfeld τ wird gegeben durch:

$$\tau_{ij} = \lambda \partial_k u^k \delta_{ij} + \mu (\delta_{ik} \partial_j u^k + \delta_{jk} \partial_i u^k) \quad (22)$$

Das Vektorfeld q ist der Wärmefluß.

Zu diesen Erhaltungsgleichungen kommen thermodynamische Beziehungen. Wir nehmen an, daß p und e durch ρ und die (als positiv angenommene) Temperatur T ausgedrückt werden können. D. h. wir postulieren Zustandsgleichungen der Form $p = p(\rho, T)$ und $e = e(\rho, T)$. Diese Zustandsgleichungen bestimmen welche Art von Flüssigkeit wir betrachten. Um ein geschlossenes System von Entwicklungsgleichungen zu haben, müssen wir eine Annahme über die Wärmeleitung machen. Wir nehmen das Fouriersche Gesetz $q = -k \nabla T$, wo k eine positive Konstante ist.

Aus der Thermodynamik folgt, daß es eine Funktion $s(\rho, T)$ gibt (spezifische Entropie, Entropie pro Masseneinheit), die folgende Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial T} \quad (23)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) \quad (24)$$

In der Thermodynamik schreibt man gerne

$$ds = \frac{1}{T} \left(de + pd \frac{1}{\rho} \right) \quad (25)$$

Dies bedeutet nichts anderes als die soeben geschriebenen Gleichungen und die aus der Sicht der Theorie der partiellen Differentialgleichungen etwas eigenwillige Notation deutet nur daraufhin, daß es für gewisse Zwecke hilfreich sein kann, die Gleichungen der Thermodynamik mit Differentialformen zu schreiben. Die Gleichungen (23) haben als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{1}{\rho^2} \left(p - T \frac{\partial p}{\partial T} \right) = \frac{\partial e}{\partial \rho} \quad (26)$$

Die Zustandsgleichungen für p und e sind also nicht unabhängig. Aus den Erhaltungsgleichungen kann man, zumindest für hinreichend glatte Lösungen, folgende Entwicklungsgleichung für die Entropie herleiten

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(u \rho s) = T^{-1} \left[-\operatorname{div} q + \lambda (\operatorname{div} u)^2 + \mu (\delta^{ik} \delta_{jl} \partial_i u^j \partial_k u^l + \partial_i u^j \partial_j u^i) \right] \quad (27)$$

Aus dieser Gleichung können wir die dissipative Natur des Systems ablesen, falls die Konstanten k , λ und μ alle positiv sind. Die Entropie $\int \rho s dx$ kann

nie abnehmen, und nimmt meistens zu. Für Lösungen, wo die Geschwindigkeit räumlich kompakten Träger hat und die Temperatur ausserhalb einer räumlich kompakten Menge konstant ist, kann dieses Funktional nur dann Zeitunabhängig sein wenn die Temperatur konstant ist, und die Geschwindigkeit Null. Es folgt dann aus der Entwicklungsgleichung für die Geschwindigkeit, daß der Druck räumlich konstant ist. Die Massenerhaltung zeigt, daß ρ zeitlich konstant ist. Mit der Zustandsgleichung folgt, daß p konstant ist. Es ist also nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen, daß die Entropie konstant sein kann. Aus der Thermodynamik folgt, daß $\partial e/\partial T > 0$. Aus (23) folgt dann, daß $\partial s/\partial T > 0$. Wegen dieser Ungleichungen ist es möglich das Paar (ρ, T) als fundamentale Variable durch (ρ, e) oder (ρ, s) zu ersetzen.

Fassen wir zusammen. Wir haben folgende Gleichungen:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (28)$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}u) - \mu\Delta u + \nabla p = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e) + p \operatorname{div}u - k\Delta T \\ = \lambda(\operatorname{div}u)^2 + \frac{1}{2}\mu(\delta^{ik}\delta_{jl}\partial_i u^j \partial_k u^l + \partial_i u^j \partial_j u^i) \end{aligned} \quad (30)$$

Dies sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Sie werden auch manchmal kompressible Navier-Stokes-Gleichungen genannt, um sie von den entsprechenden inkompressiblen Gleichungen zu unterscheiden, die wir später kurz vorstellen. Die Unbekannten in diesen Gleichungen, wenn wir sie als System von Erhaltungsgleichungen betrachten wollen, sind ρ , ρu und ρe . Die Größen p und T sollen als Funktionen von ρ und e betrachtet werden, die durch die Zustandsgleichungen bestimmt werden. Die Konstanten λ , μ und k erfüllen die Ungleichungen, die schon angegeben wurden. Wenn e durch $e + e_0$ ersetzt wird, dann bleiben die Gleichungen unverändert.

Unser Hauptziel in dieser Vorlesung ist es, die Modelle zu studieren, wo dissipative Effekte vernachlässigt werden. Im Rahmen der Navier-Stokes-Gleichungen heißt das, daß die Konstanten λ , μ und k zu Null gesetzt werden. Als Ergebnis bekommt man die Eulergleichungen einer Idealen Flüssigkeit. Um Verwirrung zu vermeiden, betonen wir, daß es sich hier um die *kompressiblen* Eulergleichungen handelt. Die Eulergleichungen können folgendermaßen in der Form (1) geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_i(\rho u^i) &= 0 \\ \partial_t(\rho u^i) + \partial_j(\rho u^i u^j + p\delta^{ij}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ u^j \left[\rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) + p \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Wenn eine Lösung dieser Gleichungen hinreichend glatt ist, kann man eine Erhaltungsgleichung für die Entropie bekommen:

$$\partial_t(\rho s) + \partial_i(\rho s u^i) = 0 \quad (32)$$

Wir können dann die dritte Gleichung in (31) durch (32) ersetzen. Auf diese Weise bekommt man ein äquivalentes System von Erhaltungsgleichungen. Wir

haben aber schon erwähnt, daß es notwendig ist, unstetige Lösungen von Erhaltungsgleichungen zu betrachten, und im Falle solcher Lösungen darf man die Gleichungen nicht einfach umformen, wie wir es hier gemacht haben. Das physikalisch richtige System, das auch für unstetige Lösungen gilt, ist (31). Die Gleichung (32) ist im allgemeinen nicht erfüllt. Nur die Ungleichung

$$\partial_t(\rho s) + \partial_i(\rho s u^i) \geq 0 \quad (33)$$

bleibt bestehen. Dies entspricht der physikalischen Tatsache, daß während Masse, Impuls und Energie erhalten sind, die Entropie im allgemeinen zunimmt.

Für glatte Lösungen sagt (32), daß die Entropie konstant ist längs Stromlinien der Flüssigkeit. Es folgt, daß wenn wir annehmen, daß die Entropie zu einem bestimmten Zeitpunkt konstant ist, sie dann überall konstant ist. Wenn wir $s = s_0$ in (31) schreiben, bekommen wir die sogenannten isentropischen Eulergleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_i(\rho u^i) &= 0 \\ \partial_t(\rho u^i) + \partial_j(\rho u^i u^j + p \delta^{ij}) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Das System (34) erhält man auch aus (31) in dem man die speziellen Zustandsgleichungen wählt, wo der Druck nur von der Dichte abhängt. Es ist auch möglich ein isentropisches Navier-Stokes-System zu definieren, wo man die Gleichungen für ρ und u vom üblichen Navier-Stokes-System benutzt und nimmt an, daß p eine gegebene Funktion von ρ ist. Die isentropischen Euler-Gleichungen gehen dann aus den isentropischen Navier-Stokes-Gleichungen hervor, in dem man die dissipativen Effekte vernachlässigt.

Ein häufig betrachtetes Modell einer Flüssigkeit ist das ideale Gas, das durch eine bestimmte Wahl der Zustandsgleichungen gekennzeichnet ist. Diese Gleichungen sind:

$$p = R\rho T \quad (35)$$

$$e = C_V T \quad (36)$$

Hier sind R und C_V positive Konstanten. R ist die Gaskonstante, und C_V die spezifische Wärme bei konstantem Volumen. Sei $\gamma = 1 + (R/C_V)$. Die Integrabilitätsbedingung (26) ist offenbar erfüllt. Die spezifische Entropie wird gegeben durch:

$$s = R \log \left(\frac{T^{1/(\gamma-1)}}{\rho} \right) \quad (37)$$

Wenn wir die fundamentalen Variablen (ρ, T) durch (ρ, e) ersetzen, bekommen wir die Zustandsgleichungen

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (38)$$

$$T = \left(\frac{1}{C_V} \right) e \quad (39)$$

Mit dem Paar (ρ, s) als fundamentale Variablen bekommen wir:

$$p = R\rho^\gamma e^{(s/C_V)} \quad (40)$$

$$T = \rho^{\gamma-1} e^{(s/C_V)} \quad (41)$$

Einen Sonderfall der isentropischen Eulergleichungen erhält man, wenn man $p = 0$ setzt. In diesem Fall spricht man von Staub. Dann entkoppeln die Entwicklungsgleichungen für die Geschwindigkeit von denen für die Dichte. Wenn man weiter auf den Fall spezialisiert, wo die Geschwindigkeit nur eine nichtverschwindende Komponente $u = u^1$ hat und u nur von $x = x^1$ abhängt, dann kommt man auf die Burgers-Gleichung mit $\epsilon = 0$. Auf die gleiche Art und Weise könnte man die Burgers-Gleichung für $\epsilon > 0$ als Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen bekommen.

1.4 Flüssigkeiten mit chemischen Reaktionen

Das folgende Beispiel wird in [9] beschrieben. Weiterführende Literatur zum Thema kann auch in dem Buch gefunden werden. In diesem Modell handelt es sich um eine Mischung aus zwei Gasen. Das erste Gas verbrennt und produziert das zweite. Mit Z wird das Verhältnis der Massendichte des unverbrannten Gases zur gesamten Massendichte bezeichnet. Folglich ist $1 - Z$ das entsprechende Verhältnis für das verbrannte Gas. Unter geeigneten Annahmen über den Mechanismus des Verbrennungsvorgangs erfüllt Z die Gleichung:

$$\partial_t(\rho Z) + \partial_i(\rho v^i Z) = -\rho W(Z, T) \quad (42)$$

wo $W(Z, T) = Ke^{-A_0/T}Z$ und T die Temperatur ist. Diese Gleichung wird mit den (kompressiblen) Eulergleichungen gekoppelt, wobei der Ausdruck für die innere Energie der Flüssigkeit modifiziert wird. Es ist zu beachten, daß die zwei Gase nicht unabhängig voneinander fließen dürfen. Die Geschwindigkeit, die in den Eulergleichungen vorkommt, ist die gemeinsame Geschwindigkeit beider Gase. Die anderen physikalischen Größen, die in den Eulergleichungen vorkommen sind die Summen dieser Größen für die einzelnen Gase. Z. B. die innere Energie, als Funktion von Druck und Massendichte, ist

$$e(\rho, p, Z) = Ze_u(\rho, p) + (1 - Z)e_b(\rho, p) \quad (43)$$

wobei e_u und e_b die Ausdrücke für die innere Energie der einzelnen Gase sind. Das System für Flüssigkeiten mit chemischen Reaktionen ist ein System von Bilanzgleichungen, die kein System von Erhaltungsgleichungen ist.

1.5 Die relativistischen Eulergleichungen

Die Eulergleichungen sind geeignet, um die meisten physikalischen Vorgänge zu modellieren, die durch eine Flüssigkeit beschrieben werden und wo Dissipation keine wesentliche Rolle spielt. Es gibt allerdings Situationen in der Astrophysik, wo dies nicht mehr der Fall ist. Wenn die Dichte oder die Geschwindigkeit sehr hoch sind, kommen relativistische Effekte ins Spiel, und die klassischen Eulergleichungen müssen durch die relativistischen Eulergleichungen ersetzt werden. Diese Gleichungen sollen in diesem Abschnitt beschrieben werden. Wir fangen mit dem isentropischen Fall an. Zunächst schreiben wir die Gleichungen (34)

etwas um. Sei:

$$T^{00} = \rho \quad (44)$$

$$T^{0i} = \rho u^i \quad (45)$$

$$T^{ij} = \rho u^i u^j + p \delta^{ij} \quad (46)$$

Diese Gleichungen definieren ein Objekt $T^{\alpha\beta}$, wo die griechischen Indizes die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Mit dieser Schreibweise können die Gleichungen (34) in der sehr kompakten Form $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ geschrieben werden, wo $\partial_0 = \partial_t$. Wenn wir $u^0 = 1$ definieren können wir die Definition von $T^{\alpha\beta}$ auch sehr kurz machen. Es ist nämlich $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$, wo $g^{00} = 0$, $g^{0i} = 0$ und $g^{ij} = \delta^{ij}$. Nach diesen Transformationen sehen die klassischen Eulergleichungen und die relativistischen Eulergleichungen sehr ähnlich aus. Betrachten wir die Minkowski-Metrik $\eta^{\alpha\beta}$, definiert durch $\eta^{00} = -1$, $\eta^{0i} = 0$, $\eta^{ij} = \delta^{ij}$. Die fundamentalen Größen, die die Flüssigkeit beschreiben sind die Energiedichte μ , die Vierergeschwindigkeit u^α und der Druck p . Die Vierergeschwindigkeit erfüllt die Beziehung $\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$, wo $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Eine Zustandsgleichung verbindet p mit μ . Wir definieren jetzt den Energieimpulstensor der Flüssigkeit durch

$$T^{\alpha\beta} = (\mu + p) u^\alpha u^\beta + p \eta^{\alpha\beta} \quad (47)$$

Die relativistischen Eulergleichungen haben dann die bekannte Form $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. In diesen Gleichungen haben wir, wie es in der Relativitätstheorie üblich ist, physikalische Einheiten gewählt, wo die Lichtgeschwindigkeit den Wert Eins hat. Wenn wir die Lichtgeschwindigkeit in den Gleichungen behalten hätten, dann hätte η^{00} den Wert c^{-2} gehabt. Dann wäre $g^{\alpha\beta}$ der Limes für $c \rightarrow \infty$ von $\eta^{\alpha\beta}$. Ausserdem hätten wir $\mu + p$ im Energieimpulstensor durch $\mu + c^{-2}p$ ersetzen müssen, und $\eta^{\alpha\beta}$ und $\eta_{\alpha\beta}$ mit geeigneten Potenzen von c multiplizieren müssen. Nach diesen Änderungen geht $T^{\alpha\beta}$ für $c \rightarrow \infty$ in den entsprechenden nichtrelativistischen Ausdruck über (wobei μ in ρ übergeht) und die Normierungsbedingung für u^α im relativistischen Fall ergibt im Limes $u^0 = 1$. Diese Beziehungen zwischen den relativistischen und den nichtrelativistischen Gleichungen wurden nur als Motivation für die relativistischen Gleichungen aufgeführt und wir werden sie nicht wieder benutzen.

Die Ruhmassendichte n einer relativistischen Flüssigkeit erfüllt die Beziehung $n^{-1} dn/d\mu = (\mu + p)^{-1}$. Wenn wir diese Beziehung als eine Gleichung für eine Funktion $n(\mu)$ auffassen, dann ist n dadurch bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt. Aufgrund der Eulergleichungen erfüllt n die Erhaltungsgleichung

$$\partial_\alpha (n u^\alpha) = 0 \quad (48)$$

Dieser Schluß gilt nur im isentropischen Fall. Im allgemeinen Fall, dem wir uns jetzt zuwenden wollen, ist (48) unabhängig von der Gleichung $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Die thermodynamischen Beziehungen (23) gelten nach wie vor, bis auf die Tatsache daß wir in unserer Notation ρ durch n ersetzen müssen. Die Beziehung zwischen e und μ ist einfach $\mu = (1 + e)n$. Die Verallgemeinerung der Beziehung zwischen μ und n , die im nichtisentropischen Fall gilt, bekommt man, in dem man die

totale durch eine partielle Ableitung ersetzt. Als Beispiel betrachten wir das Ideale Gas, das, wie im nichtrelativistischen Fall folgende Gleichungen erfüllt

$$e = C_V T \quad (49)$$

$$p = RnT \quad (50)$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$s = R \log \left(\frac{T^{1/(\gamma-1)}}{n} \right) \quad (51)$$

$$\mu = n + C_V e^{(s/C_V)} n^\gamma \quad (52)$$

$$p = R e^{(s/C_V)} n^\gamma \quad (53)$$

Wie im nichtrelativistischen Fall ist es für glatte Lösungen so, daß die Entropie erhalten ist, d.h. es gilt die Gleichung $\partial_\alpha (su^\alpha) = 0$. Für unstetige Lösungen muß diese Gleichung im allgemeinen durch eine Ungleichung ersetzt werden.

1.6 Inkompressible Modelle

Jetzt diskutieren wir die inkompressiblen Eulergleichungen. Betrachten wir die isentropischen Eulergleichungen (34). Anstatt eine Beziehung zwischen ρ und p zu verlangen, wird angenommen, daß ρ konstant ist. Es folgt dann aus der ersten Gleichung von (34), daß $\partial_i u^i = 0$. Diese Gleichung enthält keine Zeitableitung und ist also keine Evolutionsgleichung. Die Divergenz der zweiten Gleichung liefert die Beziehung

$$\Delta p = -\rho \partial_i u^j \partial_j u^i \quad (54)$$

Dies ist eine elliptische Gleichung für p . Die Evolutionsgleichung, die übrigbleibt, ist

$$\rho (\partial_t u^i + u^j \partial_j u^i) + \partial_j p \delta^{ij} = 0 \quad (55)$$

Formal kann man diese Gleichung als

$$\partial_t u^i + u^j \partial_j u^i = \delta^{ij} \partial_j \Delta^{-1} (\partial_k u^l \partial_l u^k) \quad (56)$$

schreiben. Formal ist der Term auf der rechten Seite ein Term der Ordnung Null so daß die Gleichung eine gewisse Ähnlichkeit mit einer hyperbolischen Gleichung hat. Das Symbol Δ^{-1} drückt aus, daß man eine Laplace-Gleichung lösen muß, etwas was sehr von räumlichen Randbedingungen abhängt. Bei diesem System fehlt die Lokalität, die für hyperbolische Gleichungen typisch ist. Die kompressiblen und inkompressiblen Eulergleichungen haben trotzdem vieles gemeinsam.

Die Gleichung (56) ist eine Gleichung für die Geschwindigkeit alleine; der Druck ist eliminiert worden. Mann sollte aber nicht vergessen, daß der Druck wesentlicher Bestandteil der Beschreibung der physikalischen Situation ist, und daß dieser Druck positiv sein soll. Mit anderen Worten, wenn man eine Lösung von (56) gefunden hat bleibt noch etwas zu tun, um zu zeigen, daß diese Lösung

physikalisch vernünftig ist. Man muß nämlich kontrollieren ob der Druck, der durch die gegebene Geschwindigkeit und (54) bestimmt wird, positiv ist.

In ähnlicher Weise kann man die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen definieren. Darauf werden wir aber hier nicht weiter eingehen. Viele Informationen über diese inkompressiblen Modelle findet man im Buch von Lions[7]. Dort wird auch die Verallgemeinerung behandelt, wo die Dichte längs jeder Stromlinie konstant ist, aber auf verschiedenen Stromlinien verschieden sein darf. Wir warnen noch mal, daß die inkompressiblen Modelle oft als *die* Euler- oder Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet werden.

1.7 Das Cauchy-Problem

Hyperbolische Gleichungen sind Evolutionsgleichungen und deshalb hat das Cauchy-Problem für diese Gleichungen eine grosse Bedeutung. Dies gilt insbesondere für das System (1). Man möchte zu vorgeschriebenen Anfangsdaten $u_0(x)$ eine entsprechende Lösung $u(t, x)$ mit $u(0, x) = u_0(x)$ produzieren. Hierbei unterscheidet man zwischen solchen Lösungen, die nur lokal in der Zeit existieren und solchen, die global existieren. Man unterscheidet auch zwischen klassischen Lösungen und solchen die nicht stetig differenzierbar sind.

In den Anwendungen sind Anfangsrandwertprobleme auch wichtig, wo auch Randwerte vorgeschrieben werden. Mit solchen Problemen befassen wir uns in dieser Vorlesung nicht. Wir betrachten Lösungen, die für jeden betrachteten Wert von t auf dem ganzen \mathbf{R}^n definiert sind. Meistens nehmen wir Einfachheit halber an, daß die Anfangsdaten kompakten Träger haben. Wir betrachten auch meistens Lösungen mit räumlich kompaktem Träger. Manche Theoreme, die wir vorstellen gelten auch allgemeiner. Diese Annahmen sollen dazu dienen, wichtige allgemeine Ideen in einem übersichtlichen Rahmen darzustellen, ohne daß sie von Einzelheiten verdeckt werden. Aus den gleichen Gründen nehmen wir oft an, daß gewisse Abbildungen glatt (C^∞) sind, obwohl C^1 oder C^2 ausreichen würde. Wenn man die analogen Aussagen unter schwächeren Annahmen beweisen wollte, müsste man Argumente verwenden, wo gegebene Abbildungen durch andere mit besseren Differenzierbarkeitseigenschaften approximiert werden. Argumente dieser Art sind wichtig, aber würden von den Hauptthemen dieser Vorlesung ablenken.

2 Endliche Lebensdauer klassischer Lösungen

2.1 Der skalare Fall

Es ist schon gesagt worden, daß unstetige Lösungen von (1) eine wichtige Rolle spielen. Dazu müssen wir sagen, was es heißt, daß eine unstetige Funktion eine Lösung einer Differentialgleichung ist. Der notwendige Begriff der schwachen Lösungen wird in einem späteren Abschnitt diskutiert. Im Moment möchten wir die Notwendigkeit einer solchen Ausweitung des Lösungsbegriffes zeigen. Dazu wird folgendes gezeigt. Betrachten wir glatte Anfangsdaten für die Gleichung

(1) bei $t = 0$. Das heißt, wir suchen eine Lösung $u(t, x)$ der Gleichung, die die Bedingung $u(0, x) = u_0(x)$ erfüllt. Um alles möglichst einfach zu halten, nehmen wir an, daß u_0 eine glatte Funktion mit kompaktem Träger ist. Wir werden sehen, daß, unter sehr allgemeinen Umständen, es zu diesen Daten keine glatte Lösung für alle $t \in [0, \infty)$ gibt. Lokale Existenzsätze, die die Existenz einer Lösung für $t \in [0, T)$ behaupten, werden später diskutiert. Der Inhalt dieses Abschnittes ist aber von solchen Sätzen weitgehend unabhängig. Hier geht es darum, die Existenz einer glatten Lösung anzunehmen, global in der Zeit, und zu einem Widerspruch zu kommen. Daraus kann man schließen, daß wenn man globale Lösungen zu allen Anfangsdaten haben will, diese Lösungen im allgemeinen nicht glatt sein können.

Wir fangen mit dem einfachsten Fall an, nämlich $n = 1$ und $k = 1$, d.h. eine skalare Gleichung in einer Raumdimension. Die Gleichung (2) kann dann in der Form

$$\partial_t u + \lambda(u) \partial_x u = 0 \quad (57)$$

geschrieben werden. Im Moment nehmen wir an, daß λ global definiert ist, d.h. das Gebiet G , das in der Einleitung eingeführt wurde, ist ganz \mathbf{R} . Die Strukturbedingung (*) ist in diesem Fall keine Einschränkung. Im Falle $\lambda(u) = u$ ist dies die Burgers-Gleichung mit $\epsilon = 0$.

Theorem 1 Sei $u_0(x)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf \mathbf{R} und Sei $u(t, x)$ eine glatte Lösung von (57) auf $[0, \infty) \times \mathbf{R}$ mit $u(0, x) = u_0(x)$. Dann ist $\lambda(u_0)$ konstant.

Bemerkung Dieses Theorem zeigt, daß für fast alle λ und u_0 keine globale glatte Lösung von (57) mit Anfangsdatum u_0 existiert. Die einzigen Ausnahmen sind wenn u_0 identisch verschwindet oder wenn λ in einer Umgebung der Null konstant ist.

Beweis Wir nehmen an, daß $\lambda(u_0)$ nicht konstant ist, und erhalten einen Widerspruch. Die Funktion $\lambda(u_0)$ ist gleich $\lambda(0)$ für $|x|$ hinreichend groß. Wenn sie also nicht konstant ist, muß $d/dx(\lambda(u_0))$ irgendwo negativ sein. Jetzt werden zwei verschiedene Beweise von Theorem 1 vorgestellt. Betrachten wir zunächst die charakteristischen Kurven, die durch die Gleichung $dx/dt = \lambda(u(t, x))$ definiert sind. Aus (57) folgt, daß u längs dieser Kurven konstant ist. Daraus folgt wiederum, daß die charakteristischen Kurven Geraden sind. Die Steigung der jeweiligen Geraden wird durch den Wert von $\lambda(u_0)$ in dem Punkt bestimmt, wo die Gerade die Kurve $t = 0$ schneidet. Es existieren x_1 und x_2 in \mathbf{R} so daß $\lambda(u_0(x_1)) > \lambda(u_0(x_2))$ und $x_1 < x_2$. Dann schneiden sich die charakteristischen Kurven durch diese zwei Punkte im Bereich $t > 0$. Die Lösung u hat zwei verschiedene konstante Werte längs der Geraden, was der Stetigkeit der Lösung in ihrem Schnittpunkt widerspricht. Damit ist der erste Beweis beendet. Für den zweiten Beweis definieren wir die Größe $v = \lambda'(u) \partial_x u$. Es stellt sich heraus, daß diese Größe eine einfache Gleichung längs der Charakteristiken erfüllt. Wir schreiben D/Dt für die Richtungsableitung längs der charakteristischen Kurven. D. h.

$$D/Dt(f(t, x)) = \partial_t f(t, x) + \lambda(u) \partial_x f(t, x) \quad (58)$$

für jede Funktion $f(t, x)$. Dann ist $Du/Dt = 0$. Sei $v = \lambda'(u)\partial_x u$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \frac{Dv}{Dt} &= \frac{D}{Dt}(\lambda'(u)\partial_x u) \\
 &= \lambda''(u)\frac{Du}{Dt}\partial_x u + \lambda'(u)\frac{D}{Dt}(\partial_x u) \\
 &= -[\lambda'(u)]^2(\partial_x u)^2 \\
 &= -v^2
 \end{aligned} \tag{59}$$

Auf diese Weise bekommen wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für v . Sie ist so einfach, daß sie explizit gelöst werden kann. Das Ergebnis ist, daß längs einer Charakteristik $v = \frac{v_0}{1+v_0 t}$. Dies ist nur dann mit der Existenz einer globalen glatten Lösung für $t \geq 0$ verträglich, wenn $v_0 \geq 0$. Da $v_0 = \partial_x(\lambda(u_0(x)))$ haben wir den zweiten Beweis des Theorems.

Die Aussage des Theorems kann so interpretiert werden, daß eine globale Lösung nur dann möglich ist, wenn für die gegebenen Daten die Gleichung sich wie eine lineare Gleichung verhält. Auf der anderen Seite, die allgemeine Existenztheorie, die wir bisher nicht besprochen haben, sagt, daß es im linearen Fall immer globale glatte Lösungen gibt. Damit ist die Frage, wann globale glatte Lösungen zu gegebenen Anfangsdaten existieren, im Falle $k = n = 1$ erfolgreich beantwortet. Wir kommen jetzt zur Bemerkung zurück, daß λ global definiert sein soll. Nehmen wir jetzt an, daß λ nur auf einem Intervall G definiert ist, und daß u_0 nur Werte in G annimmt. Weil die Lösung längs der charakteristischen Kurven konstant ist, bleibt die Lösung immer in G . Theorem 1 gilt also auch im Fall, wo λ nur lokal definiert ist.

Als nächstes betrachten wir den Fall $k = 1, n > 1$, d.h. eine skalare Erhaltungsgleichung in mehreren Raumdimensionen. Die Gleichung (2) kann dann in der Form

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \lambda^i(u)\partial_i u = 0 \tag{60}$$

geschrieben werden. Die Strukturbedingung (*) ist auch in diesem Fall keine Einschränkung. Wir werden folgendes algebraisches Lemma benötigen:

Lemma Wenn eine n mal n Matrix einen Rang ≤ 1 hat dann gilt $\text{Det}(I+tM) = 1 + t\text{Spur}(M)$.

Beweis Die Matrix M hat höchstens einen nichtverschwindenden Eigenwert und dieser Eigenwert ist gleich der Spur von M . In dem man eine geeignete (z. B. orthonormale) Basis benutzt, die dem Kern von M angepasst ist, sieht man, daß die Determinante von $I + tM$ nichts anderes ist als dieser Eigenwert mal t plus Eins.

Theorem 2 Sei $u_0(x)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf dem \mathbf{R}^n und sei $u(t, x)$ eine glatte Lösung von (60) auf $[0, \infty) \times \mathbf{R}^n$ mit $u(0, x) = u_0(x)$. Dann gilt $\partial_i \lambda^i(u_0) \geq 0$.

Beweis Beide Beweise von Theorem 1 lassen sich auf diesen Fall verallgemeinern. Wir werden beide diskutieren. Die charakteristischen Kurven werden in

diesem Fall durch die Gleichungen $dx^i/dt = \lambda^i(u(t, x^j))$ definiert. Wie im eindimensionalen Fall können wir schliessen, daß diese Kurven Geraden sind, und daß die Unbekannte u längs dieser Geraden konstant ist. Die charakteristischen Kurven werden durch die Gleichungen

$$x^i(t) = \alpha^i + \lambda^i(u_0(\alpha))t \quad (61)$$

gegeben. Wenn diese Beziehung nach α^j differenziert wird, bekommt man:

$$\partial x^i / \partial \alpha^j = \delta_j^i + t(\lambda^i)'(u_0(\alpha))(\partial u_0 / \partial \alpha^j)(\alpha) \quad (62)$$

Wenn die linke Seite mit J bezeichnet wird, dann hat diese Gleichung die allgemeine Form $J = I + tM$, wo die n mal n Matrix M einen Rang hat, der nicht größer als Eins ist. Das algebraische Lemma liefert dann eine Formel für $\text{Det}J$, nämlich:

$$\text{Det}J = 1 + t(\lambda^i)'(u_0(\alpha))(\partial u_0 / \partial \alpha^i)(\alpha) \quad (63)$$

Jetzt nehmen wir an, daß die gewünschte Ungleichung $\partial_i \lambda^i(u_0) \geq 0$ nicht erfüllt ist, und erhalten einen Widerspruch. Diese Annahme bedeutet, daß es ein x gibt derart, daß $\partial_i \lambda^i(u_0(x)) < 0$. Auf der charakteristischen Kurve, die durch diesen Punkt bei $t = 0$ verläuft impliziert (63), daß $\text{Det}J$ nach einer gewissen Zeit Null werden muß. Sei t_0 die erste Zeit wo dies auf der gegebenen charakteristischen Kurve passiert. Wenn $t \rightarrow t_0$ mit $t < t_0$ dann divergiert $(\text{Det}J)^{-1} = \text{Det}J^{-1}$. Also divergiert J^{-1} . Aus der Gleichung

$$\delta_j^i = \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} + (\lambda^i)'(u_0(\alpha)) \frac{\partial u_0}{\partial \alpha^k} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} t \quad (64)$$

folgt, daß $\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} J^{-1}$ unbeschränkt ist wenn $t \rightarrow t_0$ längs der charakteristischen Kurve. Diese Größe ist aber nichts anderes als $\partial u / \partial x$. Die Lösung kann also nicht glatt sein.

Für den zweiten Beweis, betrachten wir $v = \partial_i(\lambda^i(u))$. Wenn D/Dt wieder die Richtungsableitung in Richtung der charakteristischen Kurve bezeichnet, dann gilt $Dv/Dt = -v^2$ wie im eindimensionalen Fall und der Beweis geht genauso.

Jetzt werden wir zeigen, daß die notwendige Bedingung von Theorem 2 auch für globale Existenz hinreichend ist. Dazu wird folgendes Lemma von Hadamard benötigt. Es sei daran erinnert, daß eine Abbildung zwischen topologischen Räumen *eigentlich* heißt wenn das Urbild jeder kompakten Teilmenge kompakt ist.

Lemma Sei ϕ eine glatte Abbildung des \mathbf{R}^n in sich, die eigentlich ist und deren Ableitung $D\phi$ überall invertierbar ist. Dann ist ϕ bijektiv und die inverse Abbildung ϕ^{-1} ist glatt.

Beweis Der Satz über inverse Funktionen zeigt, daß ϕ ein lokaler Diffeomorphismus ist. D. h., jeder Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ hat eine offene Umgebung U_x derart, daß die Einschränkung von ϕ ein Diffeomorphismus von U_x auf die offene Teilmenge $\phi(U_x)$ ist. Insbesondere ist das Bild von ϕ offen. Als nächstes wird gezeigt, daß ϕ surjektiv ist. Nehmen wir an, daß ϕ nicht surjektiv ist. Dann gibt es einen

Punkt y im Rand von $\phi(\mathbf{R}^n)$. Da die Menge $\phi(\mathbf{R}^n)$ offen ist, kann y nicht darin enthalten sein. Es gibt eine Folge y_i von Punkten aus $\phi(\mathbf{R}^n)$, so daß $y_i \rightarrow y$. Es gibt dann eine Folge x_i mit $\phi(x_i) = y_i$. Sei K eine kompakte Umgebung von y . Für i hinreichend groß ist $y_i \in K$. Deshalb liegt x_i in $\phi^{-1}(K)$. Die Menge $\phi^{-1}(K)$ ist kompakt, da ϕ eigentlich ist. Daraus folgt, daß x_i eine konvergente Teilfolge x_{i_r} hat mit Grenzwert x . Aus der Stetigkeit von ϕ folgt nun $\phi(x) = y$, ein Widerspruch. Damit ist gezeigt worden, daß ϕ surjektiv ist. Sei jetzt y ein Punkt des \mathbf{R}^n . Die Mengen $\{y\}$ und $\phi^{-1}(\{y\})$ sind kompakt. Da ϕ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $\phi^{-1}(\{y\})$ diskret und deshalb endlich. Diese Menge besteht also aus endlich vielen Punkten x_1, \dots, x_m . In dem wir die Größe der Mengen U_{x_1}, \dots, U_{x_m} möglicherweise reduzieren, können wir annehmen, daß $\phi(U_{x_1}) = \dots = \phi(U_{x_m}) = V$ für eine offene Umgebung V von y . Ausserdem können wir annehmen, daß \bar{V} kompakt ist. Wir können V weiter reduzieren, und U_{x_1}, \dots, U_{x_m} entsprechend. Jetzt wird gezeigt, daß wenn V klein genug gewählt wird, $\phi^{-1}(V) = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$. Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist. Dann gibt es eine Folge y_i mit $y_i \rightarrow y$ für $i \rightarrow \infty$ und Punkte \bar{x}_i mit $\phi(\bar{x}_i) = y_i$ die nicht in $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$ liegen. Für i groß liegt y_i in V und wir können die Tatsache, daß ϕ eigentlich ist, wieder benutzen, um eine Teilfolge \bar{x}_{i_r} zu finden, mit $\phi(\bar{x}_{i_r}) \rightarrow y$ und $\bar{x}_{i_r} \rightarrow x$. Dann ist $\phi(x) = y$ und infolgedessen muß x einer der Punkte x_1, \dots, x_m sein. Daraus folgt aber, daß \bar{x}_{i_r} in U_{x_j} liegt für ein bestimmtes j und r hinreichend groß, ein Widerspruch. Damit haben wir bewiesen, daß ϕ eine Überlagerung ist. Da \mathbf{R}^n einfach zusammenhängend ist, folgt daraus, daß ϕ injektiv ist. Der Beweis ist also fertig.

Theorem 3 Sei $u_0(x)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf dem \mathbf{R}^n . Wenn für glatte Funktionen $\lambda^i : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ die Ungleichung $\partial_i \lambda^i(u_0) \geq 0$ gilt, dann gibt es eine globale glatte Lösung $u(t, x)$ von (60) auf $[0, \infty) \times \mathbf{R}^n$ mit $u(0, x) = u_0(x)$.

Beweis Für einen gegebenen Wert t_0 von t ist die Abbildung $\alpha \mapsto x$ definiert durch $x^i = \alpha^i + \lambda^i(u_0(\alpha))t_0$ glatt. Die Ableitung dieser Abbildung ist die Größe J , die schon im Beweis von Theorem 2 untersucht wurde. Aus (63) folgt, daß $\text{Det} J \geq 1$. Deshalb ist die Ableitung der Abbildung überall invertierbar. Daß die Abbildung eigentlich ist, ist geometrisch klar. Deshalb ist sie, nach dem Lemma von Hadamard, invertierbar mit einer glatten inversen Abbildung. Es folgt, daß die Abbildung $(t, \alpha) \mapsto (t, x)$ auch eine glatte Inverse hat. Die Zusammensetzung von u_0 mit der daraus resultierenden Abbildung $(t, x) \mapsto \alpha$ ist die gewünschte globale Lösung.

Bemerkung Die Theoreme in diesem Abschnitt wurden zum ersten mal in [2] bewiesen. Weitere Einzelheiten findet man in [9] und [6].

Wir weisen explizit darauf hin, daß Theorem 2 und Theorem 3 auch dann gelten wenn die Koeffizienten λ_i nur auf einem lokalen Gebiet G definiert sind. Der Beweis ist genauso wie im Fall $n = 1$.

Die Argumente im Beweis von Theorem 3 können leicht adaptiert werden, um eine Aussage zu geben in dem Fall, wo die Ungleichung von den Anfangsdaten nicht erfüllt ist. Die Aussage ist, daß eine glatte Lösung zu den gegebenen Anfangsdaten für eine kurze Zeit existiert, und zwar so lange, bis $\text{Det} J$

längs einer charakteristischen Kurve gegen Null geht. Wir wissen aber genau, wann das passiert. Es existiert eine glatte Lösung auf dem Intervall $[0, T^*)$, wo $T^* = (\sup\{-\partial_i \lambda^i(u_0)\})^{-1}$. (Wenn das Supremum Null ist können wir wegen Theorem 3 $T^* = \infty$ setzen.) Ausserdem zeigt der Beweis von Theorem 2, daß $[0, T^*)$ tatsächlich das maximale Zeitintervall ist, wo eine glatte Lösung existiert. Für $t \rightarrow T^*$ bleibt u beschränkt, aber das Maximum von $|Du|$ divergiert. dieses Verhalten ist typisch für die Bildung einer Stoßwelle (Schock).

2.2 Systeme in einer Raumdimension

Jetzt kommen wir zum Fall $n = 1$ und $k > 1$ von (1), d.h. Systeme in einer Raumdimension. Im eindimensionalen Fall $n = 1$ definieren $r_i(u)$ k Vektorfelder auf dem Gebiet G . Die Integralkurven dieser Vektorfelder heißen Verdünnungskurven. Diese erfüllen die Gleichungen $du^i/dt = r_i(u)$. Es ist wichtig zu wissen, wie die Eigenwerte sich längs der entsprechenden Verdünnungskurven verhalten.

Definition Das System heißt *echt nichtlinear* für den Eigenvektor $r_i(u)$ wenn der entsprechende Eigenwert $\lambda_i(u)$ des Systems (2) mit $n = 1$ die Ungleichung $r_i(u) \cdot \nabla \lambda_i(u) \neq 0$ für alle u erfüllt und *linear entartet* wenn $r_i(u) \cdot \nabla \lambda_i(u) = 0$ für alle u .

Dies bedeutet, daß die Eigenwerte längs der entsprechenden Verdünnungskurven strikt monoton bzw. konstant sind. Im Falle, wo das System echt nichtlinear ist für alle Eigenvektoren, ist es üblich, die Eigenvektoren so zu normalisieren, daß $r_i(u) \cdot \nabla \lambda_i(u) = 1$.

Die Aussagen über die Nichtexistenz globaler glatter Lösungen werden im Fall $n = 1$, $k > 1$ nicht so allgemein sein, wie im Fall $n > 1$, $k = 1$. In diesem Zusammenhang spielen die sogenannten einfachen Wellen eine wichtige Rolle. Eine Lösung $u(t, x)$ von (1) ist eine Abbildung von einer Teilmenge des \mathbf{R}^2 in den \mathbf{R}^k . Eine besondere Klasse von Lösungen bilden die, die konstant sind. In dem Fall ist das Bild von u ein Punkt. Natürlich sind diese Lösungen ziemlich langweilig. Man kann erwarten, daß für generische Lösungen das Bild zweidimensional ist. Zwischen den generischen und den konstanten Lösungen gibt es einen anderen Fall, wo das Bild von u in einer Kurve im \mathbf{R}^k enthalten ist. Diese Lösungen sind die einfachen Wellen. Sie sind von der Form:

$$u(t, x) = U(\sigma(t, x)) \tag{65}$$

Aus der Gleichung (1) folgt

$$(dU/d\sigma)\partial_t\sigma + A(U)(dU/d\sigma)\partial_x\sigma = 0 \tag{66}$$

Wir interessieren uns für den Fall, daß $dU/d\sigma \neq 0$. Dann besagt (66) insbesondere, daß $dU/d\sigma$ ein Eigenvektor von $A(U)$ ist. Deshalb muß die Kurve in der das Bild von u liegt eine Verdünnungskurve sein. Der Name dieser Kurven kommt daher, daß die Verdünnungswellen, von denen wir später mehr sehen werden, spezielle einfache Wellen sind.

Betrachten wir jetzt eine einfache Welle im Fall wo das System für den Eigenvektor, der wie oben mit der Welle assoziiert ist, echt nichtlinear ist. Sei λ_i der entsprechende Eigenwert. Wir bekommen die Gleichung

$$\partial_t \sigma + \lambda_i(U(\sigma)) \partial_x(\sigma) = 0. \quad (67)$$

Wegen der echten Nichtlinearität besagt Theorem 1, daß es keine globalen glatten Lösungen dieser Gleichung gibt, die Anfangsdaten mit kompaktem Träger haben und die nicht identisch verschwinden. Dies zeigt, daß einfache Wellen, die zu einem Eigenvektor gehören, für den das System echt nichtlinear ist, nicht für alle $t \geq 0$ existieren and glatt sein können.

Als nächstes wird ein Eindeutigkeitsatz für hyperbolische Systeme in einer Raumdimension bewiesen.

Theorem 4 Sei u_0 eine glatte Abbildung von \mathbf{R} nach \mathbf{R}^k mit kompaktem Träger. Es sei eine Gleichung der Form (2) mit $n = 1$ gegeben, die die Strukturbedingung (*) erfüllt. Wenn es eine glatte Lösung u auf einem Zeitintervall $[0, T]$ gibt mit räumlich kompaktem Träger und $u(0, x) = u_0(x)$ dann ist diese die einzige glatte Lösung mit diesen Anfangsdaten.

Beweis Wenn die Gleichung (2) mit einem dualen Eigenvektor $l_i(u)$ multipliziert wird, bekommt man die Gleichung

$$\partial_t(l_i \cdot u) - \lambda_i(u) \partial_x(l_i \cdot u) = [-\partial_t l_i(u) + \lambda_i(u) \partial_x l_i(u)] \cdot u \quad (68)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Größe $l_i \cdot u$ eine gewöhnliche Differentialgleichung längs der i -ten charakteristischen Kurve erfüllt, mit einer rechten Seite, die von u abhängt. Sei v eine andere Lösung mit den gleichen Anfangsdaten. Dann erfüllt $u - v$ die Gleichung

$$\partial_t(u - v) = A(u) \partial_x(u - v) + [A(u) - A(v)]v \quad (69)$$

Mit dem Mittelwertsatz kann man $A(u) - A(v) = M(u, v)(u - v)$ schreiben, wo M stetig ist. Wenn wir wieder mit $l_i(u)$ multiplizieren, dann ergibt sich

$$\partial_t(l_i \cdot (u - v)) - \lambda_i(u) \partial_x(l_i \cdot (u - v)) = [-\partial_t l_i(u) + \lambda_i(u) \partial_x l_i(u) + M(u, v)v] \cdot (u - v) \quad (70)$$

Sei Λ das Maximum von allen Eigenwerten $\lambda_i(u)$ auf dem Intervall $[0, t]$. Für $L > 0$ sei $\Delta(t) = \sup\{|(u - v)(t, x)| : x \in [-L - \Lambda(T - t), L + \Lambda(T - t)]\}$. Dann folgt aus (70) die Ungleichung

$$\Delta(t) \leq C \int_0^t \Delta(s) ds \quad (71)$$

wo C eine obere Schranke ist für den Ausdruck in eckigen Klammern auf der rechten Seite von (70) auf dem Gebiet definiert durch die Ungleichungen $0 \leq t \leq T$ und $-L - \Lambda(T - t) < x < L + \Lambda(T - t)$. Aus (71) folgt $\Delta = 0$ und $u = v$.

Betrachten wir jetzt Anfangsdaten mit kompaktem Träger für eine einfache Welle. Aus den Überlegungen des letzten Abschnittes folgt, daß dazu eine Lösung

existiert, die eine einfache Welle ist, und räumlich kompakten Träger hat, da wir dazu nur eine skalare Gleichung zu lösen brauchen. Aus Theorem 4 folgt, daß diese Lösung die einzige glatte Lösung zu diesen Daten ist. Falls das System für mindestens einen Eigenwert echt nichtlinear ist, können wir auf diese Weise glatte Daten mit kompaktem Träger für Gleichung (1) mit $n = 1$ finden so daß es keine entsprechende globale glatte Lösung gibt.

Im Falle eines Systems ($k > 1$) gibt es keine Garantie, daß eine Lösung nicht nach endlicher Zeit gegen den Rand des Gebietes G konvergiert. Genauer gesagt, es gibt eine Zeit T so daß für $t \rightarrow T$ das Bild von $\mathbf{R} \times [0, t]$ unter u nicht in einer festen kompakten Teilmenge von G bleibt. Bei den einfachen Wellen, die wir oben benutzt haben, kann dies nicht passieren, aber es ist für andere Lösungen nicht von vornherein ausgeschlossen.

Eine weitere Bemerkung zum Theorem 4 ist noch angebracht. Im Beweis wurde gezeigt, daß im allgemeinen $u(t, x)$ durch die Einschränkung der Anfangsdaten auf eine kompakte Teilmenge der Anfangshyperfläche, die unter Umständen sehr klein sein kann, bestimmt ist. Wenn, z. B. t gegen Null konvergiert, konvergiert das Durchmesser dieser Menge gegen Null. Hier sehen wir die Lokalität von hyperbolischen Gleichungen. Der Wert $u(t, x)$ wird nicht von den gesamten Daten auf der Anfangshyperfläche bestimmt, sondern nur von den Daten auf einem Teilbereich.

Wir haben gesehen, daß Eigenvektoren für die ein System echt nichtlinear ist, benutzt werden können um Sätze über die endliche Lebensdauer von Lösungen zu zeigen. Als Kontrast, betrachten wir jetzt einen Fall, wo das System für alle Eigenvektoren linear entartet ist. Betrachten wir das System

$$\partial_t r + \lambda(r, s) \partial_x r = 0 \quad (72)$$

$$\partial_t s + \mu(r, s) \partial_x s = 0 \quad (73)$$

Theorem 5 Wenn das System (72) strikt hyperbolisch (d.h. $\lambda \neq \mu$) und linear entartet (d.h. $\partial \lambda / \partial r = \partial \mu / \partial s = 0$) ist, dann gibt es zu jedem glatten Anfangsdatum mit kompaktem Träger eine globale glatte Lösung.

Da wir den notwendigen lokalen Existenzsatz nicht bewiesen haben, fehlen uns im Moment die Voraussetzungen, um dieses Theorem zu beweisen. Wir werden aber gewisse Eigenschaften von Lösungen beweisen. Wenn wir dann später einen geeigneten lokalen Existenzsatz bewiesen haben, wird aus den Eigenschaften, die wir jetzt herleiten, die Aussage des Theorems unmittelbar folgen.

Lemma Unter den Annahmen von Theorem 5 hat jede glatte Lösung der Gleichung (72) mit räumlich kompaktem Träger auf einem Intervall $[0, T)$ die Eigenschaft hat, daß r , s , $\partial_x r$ und $\partial_x s$ beschränkt sind.

Beweis Es ist elementar zu sehen, daß r und s beschränkt sind, da sie längs der charakteristischen Kurven konstant sind. Es bleibt zu zeigen, daß die Ableitungen beschränkt sind. Wir definieren eine Funktion $h(r, s)$ als eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\lambda - \mu} \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (74)$$

Sei $u = e^{h(r,s)} \partial r / \partial x$. Wenn wir die Ableitungen von u bezüglich t und x berechnen, und die erste Gleichung von (72) benutzen, bekommen wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = e^{h(r,s)} \left[-\frac{\partial \lambda}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \lambda \frac{\partial s}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \right] \quad (75)$$

Aus der zweiten Gleichung in (72) folgt, daß $\partial_t s + \lambda \partial_x s = (\lambda - \mu) \partial_x s$. Die Definition von u zeigt dann, daß

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(r, s) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \lambda}{\partial r} e^{-h(r,s)} u^2 \quad (76)$$

Weil das System linear entartet ist, verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, mit der Folge, daß u beschränkt ist. Da $h(r, s)$ auch beschränkt ist, bekommen wir auf diese Weise die Beschränktheit von $\partial r / \partial x$. Die Beschränktheit von $\partial s / \partial x$ zeigt man genauso.

Es mag so aussehen als ob das System (72) sehr speziell wäre, da diagonalisierbar. Es ist aber in der Tat so, daß jedes System der Form (2) mit $n = 1$ und $k = 2$, das strikt hyperbolisch ist durch eine Variablentransformation in die Form (72) gebracht werden kann, zumindest lokal im Raum der Unbekannten. Die Variablen r und s , die dies leisten heißen Riemann-Invarianten, da Riemann solche Variablen im Falle der isentropischen Eulergleichungen benutzt hat. Seien u und v die ursprünglichen Variablen. Wir suchen Funktionen $r(u, v)$ und $s(u, v)$ derart, daß das System diagonalisiert wird. Weil das System strikt hyperbolisch ist, definieren die Eigenvektoren von $A(u, v)$ zwei transversale Kurvenscharen in der (u, v) -Ebene. Die geometrische Bedingung, die erfüllt werden muß, damit r und s die erwünschte Eigenschaft haben ist, daß r längs der Kurven der einen Schar konstant ist, und s längs der Kurven der anderen Schar. Es ist geometrisch klar, daß Funktionen dieser Art existieren, zumindest lokal.

Die Annahme in Theorem 5, daß das System strikt hyperbolisch ist, ist wichtig, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$\partial_t r + \lambda(s) \partial_x r = 0 \quad (77)$$

$$\partial_t s + \lambda(r) \partial_x s = 0 \quad (78)$$

Für $r = s$ ist dieses System nicht strikt hyperbolisch. Sie erfüllt aber offensichtlich die Strukturbedingung (*). Anfangsdaten (r_0, s_0) für (77) mit $r_0 = s_0$ führen im allgemeinen zu Situationen, wo keine globalen Lösungen existieren, da in dem Fall die Skalare Gleichung $\partial_t u + \lambda(u) \partial_x u = 0$ gilt. (Das System (77) ist immer linear entartet; die assoziierte skalare Gleichung kann aber sehr wohl echt nichtlinear sein.)

Betrachten wir jetzt ein System von zwei Bilanzgleichungen, das linear entartet und strikt hyperbolisch ist. Wenn es Erhaltungsgleichungen wären, würde die Einführung von Riemann-Invarianten und Theorem 5 eine Aussage über globale Existenz liefern. Dies gilt nicht mehr wenn Quellen vorhanden sind. Ein

Beispiel dafür ist folgendes System:

$$\partial_t u = -(u-1)v \quad (79)$$

$$\partial_t v + \partial_x((u-1)v) = 0 \quad (80)$$

Die Eigenwerte sind $u-1$ und 0 . Damit das System strikt hyperbolisch ist, müssen wir den Definitionsbereich G , wie am Anfang der Vorlesung eingeführt wurde, einschränken, z. B. durch die Ungleichung $u < 1$. Die Eigenvektoren können als $[1, v/(u-1)]^T$ und $[0, 1]^T$ gewählt werden. Die Wahl $r = u$, $s = v/(1-u)$ diagonalisiert das System. Explizit:

$$\partial_t r = (r-1)^2 s \quad (81)$$

$$\partial_t s + (r-1)\partial_x s = -(1-r)^3(1+r)s^2 \quad (82)$$

Das System (79) hat Lösungen mit endlicher Lebensdauer. Wenn wir eine beliebige Lösung \tilde{u} der Burgers-Gleichung nehmen, und $u = \tilde{u}+1$ und $v = \partial_x u$ setzen, bekommen wir eine Lösung von (79). Jetzt können wir die bekannten Aussagen über die endliche Lebensdauer von Lösungen der Burgers-Gleichung verwenden. Interessant ist, daß diese Lösungen von (79), im Gegensatz zu anderen Beispielen, die wir gesehen haben, auf einem endlichen Zeitintervall unbeschränkt sind. Sie verlassen jede kompakte Teilmenge von G .

2.3 Endliche Lebensdauer für Lösungen der Eulergleichungen

Wenn man ein System von Erhaltungsgleichungen mit mehreren Gleichungen in mehreren Raumdimensionen hat, und etwas über endliche Lebensdauer beweisen möchte, ist es naheliegend, Lösungen mit hoher Symmetrie zu betrachten, insbesondere solche, die nur von einer Raumkoordinate x und der Zeit abhängen. Wenn unter den Unbekannten des Systems Vektoren sind, wie z. B. die Geschwindigkeit in den Eulergleichungen, kann man weiter auf den Fall reduzieren, wo die einzige nichtverschwindende Komponente des Vektors die in der x -Richtung ist. Wenn wir bei den Eulergleichungen diese Reduktion machen, kommen wir auf folgendes System:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \quad (83)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0 \quad (84)$$

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) = 0 \quad (85)$$

oder, in nichtkonservativer Form:

$$\partial_t \rho = -u\partial_x \rho - \rho\partial_x u \quad (86)$$

$$\partial_t u = -u\partial_x u - \rho^{-1}[(\partial p/\partial \rho)\partial_x \rho + (\partial p/\partial s)\partial_x s] \quad (87)$$

$$\partial_t s = -u\partial_x s \quad (88)$$

Die Eigenwerte der Matrix, die hier die räumlichen Ableitungen multipliziert, sind in diesem Fall $u \pm \sqrt{\partial p/\partial \rho}$ und u . Sie sind reell und verschieden, vorausgesetzt, daß $\partial p/\partial \rho > 0$. Diese Bedingung ist physikalisch vernünftig, und

gilt insbesondere für das ideale Gas. Das System ist strikt hyperbolisch. Die Eigenvektoren sind $[\rho, \pm\sqrt{\partial p/\partial\rho}, 0]^T$ und $[-\partial p/\partial s, 0, \partial p/\partial\rho]^T$. Für den dritten Eigenvektor ist das System offenbar linear entartet. Um die Existenz von Daten ohne entsprechende globale glatte Lösungen zu beweisen, müssen wir deshalb die anderen zwei Eigenvektoren benutzen. Zwischen diesen beiden gibt es eine einfache Symmetrie, und es reicht deshalb, den Fall mit dem positiven Vorzeichen zu untersuchen. Für diesen Eigenwert ist das System echt nichtlinear wenn $\partial^2 p/\partial\rho^2 \geq 0$. Wir schliessen, in dem wir die Ergebnisse des letzten Abschnitts anwenden, daß es Lösungen der Eulergleichungen mit endlicher Lebensdauer gibt, vorausgesetzt, daß der Druck bei festgehaltener Entropie eine konvexe Funktion der Dichte ist. In der Tat ist diese Konvexitätseigenschaft physikalisch motiviert. Sie gilt offenbar im Falle des idealen Gases. In Wirklichkeit können die Theoreme des letzten Abschnitts nicht direkt auf die Eulergleichungen angewendet werden aus folgendem Grund. Die Theoreme betreffen Lösungen mit kompaktem Träger und die Annahmen, die wir für Lösungen der Eulergleichungen gemacht haben, sagten unter anderem aus, daß die Dichte nicht verschwinden darf. Diese Schwierigkeit kann aber leicht umgangen werden. Es reicht, eine positive Konstante ρ_0 zu wählen, und ρ durch $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ zu ersetzen. Dann dürfen wir Lösungen mit kompaktem Träger des neuen Systems betrachten. Wenn wir dann auf die ursprünglichen Variablen zurücktransformieren bekommen wir Lösungen, wo die Geschwindigkeit räumlich kompakten Träger hat und die Dichte ausserhalb einer räumlich kompakten Menge den konstanten Wert ρ_0 hat.

Eine analoge Reduktion kann im Falle der relativistischen Eulergleichungen gemacht werden, mit dem Ergebnis

$$\partial_t[\mu(1+u^2)+pu^2]+\partial_x[(\mu+p)u\sqrt{1+u^2}]=0 \quad (89)$$

$$\partial_t[(\mu+p)u\sqrt{1+u^2}]+\partial_x[\mu u^2+p(1+u^2)]=0 \quad (90)$$

$$\partial_t(ns\sqrt{1+u^2})+\partial_x(nsu)=0 \quad (91)$$

Jetzt implizieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t p &= (\partial p/\partial\mu)\partial_t\mu+(\partial p/\partial s)\partial_t s \\ &= (\partial p/\partial\mu)\partial_t\mu-(\partial p/\partial s)u(1+u^2)^{-1/2}\partial_x s \end{aligned} \quad (92)$$

$$\partial_x p = (\partial p/\partial\mu)\partial_x\mu+(\partial p/\partial s)\partial_x s \quad (93)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} u\partial_t p+\sqrt{1+u^2}\partial_x p &= (\partial p/\partial\mu)(u\partial_t\mu+\sqrt{1+u^2}\partial_x\mu) \\ &+ (\partial p/\partial s)[-u^2(1+u^2)^{-1/2}+\sqrt{1+u^2}]\partial_x s \\ &= (\partial p/\partial\mu)(u\partial_t\mu+\sqrt{1+u^2}\partial_x\mu) \\ &+ (\partial p/\partial s)(1+u^2)^{-1/2}\partial_x s \end{aligned} \quad (94)$$

Wenn wir die Klammern ausmultiplizieren und (94) benutzen, bekommen wir

$$[1+(1+(\partial p/\partial\mu)u^2)]\partial_t\mu+2(\mu+p)u\partial_t u$$

$$\begin{aligned}
& +(1 + (\partial p/\partial \mu)u\sqrt{1+u^2})\partial_x \mu + (\mu + p)(1 + 2u^2)(1 + u^2)^{-1/2}\partial_x u \\
& + (\partial p/\partial s)u(1 + u^2)^{-1/2}\partial_x s = 0
\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + \partial p/\partial \mu)u(1 + u^2)^{1/2}\partial_t \mu + (\mu + p)(1 + 2u^2)(1 + u^2)^{-1/2}\partial_t u \\
& + [\partial p/\partial \mu + (1 + \partial p/\partial \mu)u^2]\partial_x \mu + 2(\mu + p)u\partial_x u \\
& + (\partial p/\partial s)\partial_x s = 0
\end{aligned} \tag{96}$$

Wir könnten die Gleichungen nach den zeitlichen Ableitungen von μ , u und s auflösen. Das Ergebnis wäre aber so kompliziert, daß es sich empfiehlt, anders vorzugehen. Betrachten wir allgemeiner ein System der Form

$$B^0 \partial_t u + B^1 \partial_x u = 0 \tag{97}$$

Dieses System ist mit dem System $\partial_t u + A \partial_x u = 0$ äquivalent, wo $A = (B^0)^{-1} B^1$. Die Eigenwerte von A sind die Lösungen der Gleichung $\text{Det}(B^1 - \lambda B^0) = 0$ und die Eigenvektoren Lösungen der Gleichung $B^1 x = \lambda B^0 x$. Wir können also direkt mit diesen Gleichungen arbeiten, ohne das ursprüngliche System nach den zeitlichen Ableitungen aufzulösen. Im Falle der relativistischen Eulergleichungen, sehen wir leicht, daß $u/\sqrt{1+u^2}$ ein Eigenwert ist, und daß die verbleibenden Eigenwerte mit denen des isentropischen Systems identisch sind. Der Eigenvektor, der zum Eigenwert $u/\sqrt{1+u^2}$ gehört, hat eine ganz analoge Form wie im nichtrelativistischen Fall, nämlich $[-\partial p/\partial s, 0, \partial p/\partial \mu]^T$. Es folgt, daß das System für diesen Eigenvektor linear entartet ist. Es ist auch leicht zu sehen, daß die dritte Komponente der anderen zwei Eigenvektoren verschwinden muß. Das bedeutet, daß das Problem der Bestimmung dieser Eigenvektoren sich auch auf den isentropischen Spezialfall reduziert.

Die Bestimmung der anderen zwei Eigenvektoren ist eine Rechnung die, obwohl sie elementar ist, sehr lang ist, und wir werden diese Algebra nicht machen. Die Ergebnisse findet man in einer Arbeit von Chen[1], zumindest für den Fall eines idealen Gases. Das System ist echt nichtlinear für die anderen zwei Eigenvektoren. Daraus bekommt man, wie im nichtrelativistischen Fall eine Aussage über die endliche Lebensdauer von bestimmten Lösungen. Dieses Beispiel zeigt, wie Rechnungen, die in bekannten Modellbeispielen relativ einfach sind, in Anwendungen recht aufwendig werden können. Es gibt einen Spezialfall, wo die Rechnung einfach ist, nämlich wenn u in einem Punkt verschwindet. Dann sind die zwei Eigenwerte $\pm \sqrt{\partial p/\partial \mu}$ und die entsprechenden Eigenvektoren $[\rho + p, \pm \sqrt{\partial p/\partial \mu}]^T$

Wir kehren jetzt zu den klassischen Eulergleichungen zurück, und zwar zum isentropischen Fall. Die isentropischen Eulergleichungen sind ein System von zwei Gleichungen, und deshalb besteht die Möglichkeit, Riemann-Invarianten einzuführen, um noch mehr Informationen über das Langzeitverhalten der Lösungen zu bekommen. Die definierenden Eigenschaften der Riemann-Invarianten sind in diesem Fall $\rho \partial r/\partial \rho - p' \partial r/\partial u = 0$, $\rho \partial s/\partial \rho + p' \partial s/\partial u = 0$. Wir schreiben hier p' für die Ableitung von p nach ρ . Diese Gleichungen werden durch folgende Beziehungen gelöst:

$$r = u + \int (p'(\rho)/\rho) d\rho \tag{98}$$

$$s = u - \int (p'(\rho)/\rho) d\rho \quad (99)$$

Im Falle einer Zustandsgleichung der Form $p = K\rho^{(n+1)/n}$, mit K und n Konstanten, die wir vom idealen Gas schon kennen, sind die Riemann-Invarianten $u \pm K(n+1)\rho^{1/n}$. (Wir haben hier aus Gründen der Bequemlichkeit etwas andere Namen für die Konstanten gewählt als vorher.) Für diese Zustandsgleichung können wir ρ and u durch r und s ausdrücken:

$$u = \frac{r+s}{2} \quad (100)$$

$$\rho = \left[\frac{r-s}{2K(n+1)} \right]^n \quad (101)$$

Wir betrachten jetzt Lösungen, die ausserhalb einer räumlich kompakten Menge $u = 0$ und $\rho = \rho_0$ erfüllen. Deshalb haben wir

$$r = -s = K(n+1)\rho^{1/n} \quad (102)$$

Da r und s längs der entsprechenden charakteristischen Kurven konstant sind (so wurden sie ja definiert) bleiben sie beschränkt für jede Lösung auf einem beliebigen Zeitintervall. Daraus folgt, daß auch ρ und u beschränkt bleiben. Dichte oder Geschwindigkeit kann also nicht in endlicher Zeit unendlich werden (und auch nicht, selbst wenn eine Lösung für alle Zeit existieren sollte, beliebig groß werden). Es besteht aber immer noch die Gefahr, daß ρ nach endlicher Zeit gegen Null gehen könnte, so daß das Modell zusammenbricht. In dem Fall würde ein Vakuum entstehen. Passiert so etwas wirklich?

2.4 Eine dissipative Gleichung

Bei dissipativen hyperbolischen Gleichungen wie (14) sind globale glatte Lösungen viel häufiger als bei den hyperbolischen Erhaltungsgleichungen. Dies werden wir jetzt an einem Beispiel demonstrieren. Die Gleichung, eine Verallgemeinerung von (14), hat die Form

$$\partial_t u + u \partial_x u = -au \quad (103)$$

für eine positive Konstante a . Die charakteristischen Kurven werden für diese Gleichung durch $dx/dt = u(t, x)$ gegeben. Längs dieser Kurven gilt $Du/Dt = -au$. Die zweite Gleichung kann man explizit lösen, mit dem Ergebnis $u(t) = u(0)e^{-at}$ längs der Kurve. Für eine allgemeine charakteristische Kurve bekommen wir den Ausdruck

$$x(t) = \alpha - u_0(\alpha)a^{-1}e^{-at} \quad (104)$$

Wenn in diesem Ausdruck $dx/d\alpha$ immer positiv bleibt, dann existiert die Lösung für alle positiven Zeiten, wie im Beweis von Theorem 3. Jetzt

$$dx/d\alpha = 1 - u'_0(\alpha)a^{-1}e^{-at} \quad (105)$$

Wenn das Maximum von u' kleiner ist als a wird diese Bedingung erfüllt sein. Wir bekommen also globale Existenz für kleine Anfangsdaten, im Gegensatz zum Fall ohne Dissipation. Für kleine Daten fällt die Lösung exponentiell ab für $t \rightarrow \infty$ und die charakteristischen Kurven werden senkrecht. Ähnliche Ergebnisse gelten auch für andere dissipative hyperbolische Gleichungen. Eine ausgedehnte Diskussion in einer Raumdimension findet man im vierten Kapitel von [6].

2.5 Ein Konkretes Beispiel

In diesem Abschnitt versuchen wir, eine bessere Intuition dafür zu bekommen, was passiert, wenn eine Lösung endliche Lebensdauer hat. Dazu studieren wir eine spezielle Lösung der Burgers-Gleichung mit $\epsilon = 0$. Die Lösung gehört zum Anfangsdatum $u_0(x) = 1/(1+x^2)$. Daß dieses Anfangsdatum keinen kompakten Träger hat, und deshalb die Annahmen der Theoreme, die wir bewiesen haben, nicht erfüllt sind, ist unerheblich. Wenn man diese Funktion für $|x|$ groß abändern würde, um eine Funktion mit kompaktem Träger zu bekommen, würden sich die Ergebnisse nicht wesentlich ändern.

Um die Zeitentwicklung intuitiv zu verstehen ist es nützlich, eine bestimmte graphische Darstellung zu verwenden. Wie sieht der Graph der Funktion $u(t, x)$ von x für verschiedene Werte von t aus? Diese Kurve in der (x, u) -Ebene entwickelt sich so, als ob jeder Punkt sich waagrecht mit einer Geschwindigkeit gleich seiner Höhe bewegen würde. Da die höheren Punkte sich schneller bewegen ist es klar, daß sie tiefer gelegene Punkte überholen werden. Die Kurve in der (x, u) Ebene bleibt glatt. Sie kann in der Form

$$(\alpha + u_0(\alpha)t, u_0(\alpha)) \tag{106}$$

parametrisiert werden. Der Tangentenvektor zu dieser Kurve in der Ebene hat die Form $(1 + u_0'(\alpha)t, u_0'(\alpha))$. Dieser Vektor kann nie verschwinden, egal was für glatte Anfangsdaten u_0 gewählt werden. Die Kurve selbst bleibt also glatt. Das Zusammenbrechen der glatten Lösung u passiert, wenn der Tangentenvektor senkrecht wird. Die Bedingung dafür ist, daß $-u_0'(\alpha) = t^{-1}$, eine Bedingung, die wir schon gesehen haben.

Jetzt konzentrieren wir uns auf die oben angegebenen Anfangsdaten. In diesem Fall wird die Kurve durch $(\alpha + t(1 + \alpha^2)^{-1}, (1 + \alpha^2)^{-1})$ gegeben, und der Tangentenvektor hat die Form

$$(1 - 2\alpha t(1 + \alpha^2)^{-2}, -2\alpha(1 + \alpha^2)^{-2}) \tag{107}$$

Der Tangentenvektor wird senkrecht wenn $t = (2\alpha)^{-1}(1 + \alpha^2)^2$. Wir möchten wissen, wann dies zum ersten Mal eintritt. Dazu muß das Minimum von $(2\alpha)^{-1}(1 + \alpha^2)^2$ für $\alpha > 0$ berechnet werden. (Für $\alpha \leq 0$ kann nichts passieren.) Da die Funktion für $\alpha \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \infty$ gegen unendlich geht, muß es ein Minimum geben. Die Ableitung der Funktion verschwindet für nur einen positiven Wert von α , so daß das Minimum eindeutig ist. Das Minimum wird bei $\alpha = 1/\sqrt{3}$ erreicht. Dort hat t den Wert $t_* = 8/(3\sqrt{3})$. Der Punkt der (x, u) -Ebene, wo der

Tangentenvektor senkrecht wird, ist $(\sqrt{3}, 3/4)$. Die zweite Ableitung von t nach α in diesem Punkt ist gleich $4\sqrt{3}$ und ist also positiv. Nach dem Zeitpunkt $t = t_*$ gibt es genau zwei Werte von α wo der Tangentenvektor senkrecht ist. Hier muß man ein Bild malen. Eine Taylor-Entwicklung liefert für die Umkehrpunkte:

$$t = \frac{8}{3\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + O(\alpha - 1/\sqrt{3})^3 \quad (108)$$

Wenn man diese Beziehung invertiert, bekommt man

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{t}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{9}} + O\left(\frac{t}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{9}\right) \quad (109)$$

Diese Beziehungen kann man jetzt in die Gleichungen einsetzen, die die Kurve in der (x, u) -Ebene definieren. Die Umkehrpunkte in der Ebene sind

$$x = \sqrt{3} + O\left(\frac{t}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{9}\right) \quad (110)$$

$$u = \frac{3}{4} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8} \sqrt{\frac{t}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{9}} + O\left(\frac{t}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{9}\right) \quad (111)$$

Hier sehen wir den Unterschied zwischen den Werten von u an den zwei Umkehrpunkten. Eine Rechnung in dieser Ordnung reicht aber nicht aus, um die Werte von x an diesen Punkten zu unterscheiden. Für $t > t_*$ existiert die klassische Lösung nicht mehr. Trotzdem entwickelt sich die Kurve in der (x, u) -Ebene weiterhin glatt, und diese Entwicklung liefert Informationen über die schwache Lösung, die die klassische Lösung fortsetzt. Wir kommen später noch darauf zurück.

3 Schwache Lösungen

3.1 Definition und Sprungbedingungen

Es ist schon gesagt worden, daß es wichtig ist, Lösungen von (1) zu betrachten, die nicht stetig differenzierbar sind. Wir haben schon gesehen, daß es viele Anfangsdaten gibt mit der Eigenschaft, daß die ersten Ableitungen der entsprechenden Lösungen nach endlicher Zeit unbeschränkt werden. Wenn es zu solchen Anfangsdaten globale Lösungen irgendeiner Art geben sollte, dann können diese keine klassischen Lösungen sein. Dabei muß natürlich präzisiert werden, was es überhaupt heißt, daß eine Funktion, die nicht differenzierbar ist, eine Lösung von (1) ist. Es geht um sogenannte schwache Lösungen, im Gegensatz zu klassischen Lösungen, die stetig differenzierbar sind, und die Gleichungen punktweise erfüllen. Der Begriff der schwachen Lösung wird mit Hilfe von Integralformen der Gleichungen definiert. Sei ϕ eine beliebige glatte Funktion auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, deren

kompakten Träger in $(0, T) \times \mathbf{R}^n$ enthalten ist. Wenn u eine klassische Lösung von (1) ist, dann gilt folgende Beziehung:

$$\int_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n} (\partial_t \phi u + \partial_i \phi F^i(u)) dt dx = 0 \quad (112)$$

Diese Beziehung ist sinnvoll für u lokal beschränkt und meßbar. In dem Fall kann sie als Definition genommen werden, daß u eine Lösung ist. Diese Definition ist konsistent mit der punktweisen Definition im Falle, daß u stetig differenzierbar ist. Sie ist also eine vernünftige Definition einer schwachen Lösung.

Um Anfangsdaten zu behandeln, werden beliebige glatte Funktionen mit kompaktem Träger benutzt (d.h. nicht nur solche, die ihren Träger im Gebiet $t > 0$ haben) und (112) wird um einen Term ergänzt, wo das Anfangsdatum vorkommt:

$$\int_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n} (\partial_t \phi u + \partial_i \phi F^i(u)) dt dx + \int_{\mathbf{R}^n} \phi(0, x) u_0(x) dx = 0 \quad (113)$$

Um den Inhalt dieser Definition zu verstehen, ist es nützlich, Lösungen zu betrachten, die stückweise glatt sind. Fangen wir mit dem Fall $k = 1$, $n = 1$ an. Sei eine glatte Kurve durch $x = \gamma(t)$ definiert. Diese Kurve teilt die Halbebene $t \geq 0$ in zwei offene Gebiete G_1 und G_2 , die durch $x < \gamma(t)$ und $x > \gamma(t)$ definiert sind. Wir betrachten klassische Lösungen der Gleichung (1) mit $k = n = 1$ auf den abgeschlossenen Gebieten \bar{G}_1 und \bar{G}_2 . Diese zusammen definieren eine (im allgemeinen unstetige) Funktion auf dem ganzen Gebiet $t \geq 0$. Unter welchen Bedingungen ist diese Funktion eine schwache Lösung von (1)? Mit dem Theorem von Stokes bekommt man die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \phi(t, \gamma(t)) [-\gamma'(t) u_-(t, \gamma(t)) + F(u_-(t, \gamma(t)))] \\ &= \int_0^\infty \phi(t, \gamma(t)) [-\gamma'(t) u_+(t, \gamma(t)) + F(u_+(t, \gamma(t)))] \end{aligned} \quad (114)$$

für alle ϕ , wobei u_- bzw. u_+ die Grenzwerte von u von G_1 bzw. G_2 kommend sind. Daraus kann man schließen, daß längs der Kurve

$$F(u_+) - F(u_-) = \gamma'(u_+ - u_-) \quad (115)$$

Diese Bedingung heißt Rankine-Hugoniot-Bedingung und ist eine Beziehung zwischen dem Sprung in u und der Geschwindigkeit γ' mit der die Unstetigkeit propagiert. Wenn wir $[u] = u_+ - u_-$ und $[F(u)] = F(u_+) - F(u_-)$ schreiben, dann ist (115) einfach $[F(u)] = \gamma'[u]$.

Für $n > 1$ wird die Kurve γ durch eine Hyperfläche in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ ersetzt. Diese Hyperfläche kann in der Form $\Psi(t, x) = 0$ dargestellt werden. Im eindimensionalen Fall könnte man $\Psi(t, x) = x - \gamma(t)$ nehmen. Die Rankine-Hugoniot-Bedingung ist im n -dimensionalen Fall

$$[u] \partial_t \Psi + [F^i(u)] \partial_i \Psi = 0 \quad (116)$$

Diese Bedingung ist invariant unter einer Reskalierung von Ψ . Durch eine solche Reskalierung können wir $\nu_i = \partial_i \Psi$ zu einer Einheitsvektor machen, vorausgesetzt, daß der Vektor $\partial_i \Psi$ nicht verschwindet. Wenn wir $\partial_t \Psi$ mit dem gleichen Faktor reskalieren, und das Ergebnis mit $-S$ bezeichnen, dann hat die Bedingung die Form

$$S[u] = \nu_i [F^i(u)] \quad (117)$$

Die Unstetigkeit propagiert in Richtung ν mit Geschwindigkeit S .

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, wo $n > 1$ und $k > 1$. Die Bedingung sieht sehr ähnlich aus, ist aber wesentlich verschieden wegen der Tatsache, das es sich jetzt um eine Vektorgleichung handelt. Das wesentliche können wir schon im Fall $n = 1$ sehen, auf den wir uns im Moment konzentrieren werden. Das Problem ist so etwas wie ein Eigenwertproblem für k mal k Matrizen, nur nichtlinear. Wir werden später sehen, daß für einen gegebenen Wert von u_+ die möglichen Werte von u_- in vielen Fällen auf einer von k Hugoniot-Kurven liegen muß, zumindest wenn der Sprung nicht zu groß ist. Im Falle eines strikt hyperbolischen linearen Systems, handelt es sich wirklich um ein Eigenwertproblem, und die Hugoniot-Kurven bestehen aus Vektoren, die proportional zu den Eigenvektoren der Matrix A sind. In diesem Fall sind die Hugoniot-Kurven und die Verdünnungskurven identisch, aber dies ist im nichtlinearen Fall normalerweise nicht so.

Zur Illustration betrachten wir jetzt die Sprungbedingungen für die Euler-Gleichungen in einer Raumdimension. Diese sind

$$S[\rho] = [\rho u] \quad (118)$$

$$S[\rho u] = [\rho u^2 + p] \quad (119)$$

$$S[\rho s] = [\rho s u] \quad (120)$$

Wir können jetzt Zustände (ρ_-, u_-, s_-) wählen und nach Lösungen (ρ_+, u_+, s_+, S) dieser Gleichungen fragen. Es sind drei Gleichungen für vier Größen, aber ansonsten ist die Struktur der Lösungsmenge nicht offensichtlich. Die Sprungbedingungen für die relativistischen Euler-Gleichungen sind

$$S[\mu(1 + u^2) + pu^2] = [(\mu + p)u\sqrt{1 + u^2}] \quad (121)$$

$$S[(\mu + p)u\sqrt{1 + u^2}] = [\mu u^2 + p(1 + u^2)] \quad (122)$$

$$S[ns\sqrt{1 + u^2}] = [nsu] \quad (123)$$

Als nächstes kehren wir zu unserem einfachsten Beispiel wieder zurück und betrachten einige schwache Lösungen der Burgers-Gleichung mit $\epsilon = 0$. Die Sprungbedingung ergibt:

$$S(u_+ - u_-) = (1/2)(u_+^2 - u_-^2) = (1/2)(u_+ + u_-)(u_+ - u_-) \quad (124)$$

so daß $S = (1/2)(u_+ + u_-)$. Ein besonders einfacher Fall ist, wenn u_+ und u_- konstant sind. Dann ist S auch konstant, und die Unstetigkeit eine Gerade. Wenn, z. B. $u_- = 1$ und $u_+ = 0$ ist, und die Unstetigkeit bei $t = 0$ im Ursprung

ist, dann wird die Unstetigkeitskurve durch $x = t/2$ gegeben. Charakteristiken, die von links und rechts kommen laufen in die Unstetigkeit hinein. Später werden wir sehen, daß dies eine wichtige Eigenschaft von Stoßwellen ist. Sie heißt Lax-Bedingung. Wenn wir die Rollen von u_- und u_+ vertauschen, dann hat die entsprechende schwache Lösung die Eigenschaft, daß die charakteristischen Kurven aus der Unstetigkeit kommen. In physikalischen Beispielen, wie im Fall der Eulergleichungen, ist dieses Verhalten unphysikalisch. Deshalb redet man in diesem Fall nicht von einer Stoßwelle. Darauf wird später genauer eingegangen.

Das Beispiel zeigt, daß es zu einem bestimmten unstetigen Anfangsdatum, nämlich $u = 1$ für $x < 0$ und $u = 0$ für $x > 0$, eine globale schwache Lösung gibt. Dann stellt sich die Frage, ob wie im Falle einer klassischen Lösung, die Lösung eindeutig durch die Anfangsdaten bestimmt ist. Dies ist nicht der Fall. Es gibt unendlich viele schwache Lösungen mit diesem Anfangsdatum. Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Betrachten wir die Geraden $x = (1/2)(1-a)t$, $x = 0$, $x = at/2$. Sie teilen die Halbebene $t > 0$ in vier Gebiete. Sei u die Funktion, die konstant ist auf jedem dieser Gebiete und auf den verschiedenen Gebieten, von links nach rechts, die Werte 1 , $-a$, a und 0 annimmt. Die Funktion u erfüllt die Hugoniot-Beziehungen auf allen Unstetigkeitskurven, und ist deshalb eine schwache Lösung der Burgers-Gleichung. Sie hat die gleichen Anfangsdaten für alle Werte von a , und auch die gleichen Anfangsdaten wie die vorher konstruierte Lösung mit nur einer Unstetigkeit. Man sollte aber bemerken, daß es eine Unstetigkeit gibt, wo die Lax-Bedingung nicht erfüllt ist. Dies gibt schon einen Hinweis darauf, daß man vielleicht durch eine zusätzliche Bedingung die Eindeutigkeit wiederherstellen kann.

Eine andere interessante Eigenschaft von schwachen Lösungen ist, daß die Definition nicht nur von den Differentialgleichungen abhängt, sondern auch davon ab, wie man das System als System von Erhaltungsgleichungen schreibt. Wenn man die Burgers-Gleichung mit u multipliziert, und $v = u^2$ schreibt, dann bekommt man die Gleichung $\partial_t v + \partial_x(2v^{3/2}/3) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung, die links von einer Geraden 1 ist und rechts davon 0 hat als Unstetigkeitskurve $x = (3/2)t$. Die Transformation von v zu u liefert also keine schwache Lösung der Burgers-Gleichung. Aus diesem Grund ist Vorsicht immer geboten wenn man Erhaltungsgleichungen umformt. Die Klasse der schwachen Lösungen bleibt nicht davon unberührt.

3.2 Entropiebedingungen

Wie in der Einleitung erwähnt, sind Systeme von Erhaltungsgleichungen oft Grenzfälle von dissipativen Modellen. Diese Tatsache kann benutzt werden, um das fehlende Element zu liefern, das die Eindeutigkeit von schwachen Lösungen garantiert. Die zusätzlichen Bedingungen, die dabei entstehen, heißen Entropiebedingungen, da sie im Fall der Eulergleichungen mit der Zunahme der Entropie zusammenhängen. In manchen Fällen hat ein System von Erhaltungsgleichungen ein natürlich damit verwandtes dissipatives System, das aus den Anwendungen kommt. Das Musterbeispiel bilden die Navier-Stokes-Gleichungen, die bei den Eulergleichungen diese Rolle spielen. Man kann allerdings auch mathematische

Dissipation einführen, in dem man mit (1) das dissipative System

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_i (F^i(u)) = \epsilon \Delta u \quad (125)$$

assoziiert. Das System (125) hat im allgemeinen keine direkte Interpretation in den Anwendungen. Sie ist aber theoretisch wichtig bei Fragen, die mit Stoßwellen zu tun haben. Ob sie in Fällen, wo die Anwendungen ein natürliches dissipatives Modell liefern, zu den gleichen Ergebnissen führt wie das natürliche Modell, muß von Fall zu Fall untersucht werden.

Wie üblich, werden wir mit der vertrauten Burgers-Gleichung anfangen. Es lohnt sich, die zeitunabhängigen Lösungen zu bestimmen. Diese erfüllen $u \partial_x u = \epsilon \partial_x^2 u$. Die allgemeinsten Lösungen mit $\epsilon > 0$ sind Translationen der Lösungen $u(x) = -A \tanh(Ax/\epsilon)$ wo A eine positive reelle Zahl ist. (Negative Werte von A geben die gleichen Lösungen.) Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ bei einem festen Wert von A bekommt man die unstetige Lösung der Gleichung für $\epsilon = 0$, die für $x < 0$ den Wert A hat und für $x > 0$ den Wert $-A$. Wenn wir dies als zeitunabhängige Lösung der Burgers-Gleichung für $\epsilon = 0$ betrachten, ist die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Die Bedingung von Lax ist auch erfüllt. Die schwache Lösung, die für $x < 0$ den Wert $-A$ hat und für $x > 0$ den Wert A und die die Lax-Bedingung verletzt bekommt man nicht. Die dissipative Näherung trifft also in diesem Fall eine Entscheidung, und zwar zugunsten der Lösung, die die Lax-Bedingung erfüllt. Diese stehenden Stoßwellen können auch in Bewegung gesetzt werden. Der Ansatz $u(t, x) = U(x - ct)$ führt zu der Gleichung $(U - c)U' = \epsilon U''$. Die Lösungen dieser Gleichung bekommt man durch eine Verschiebung von u in den stehenden Lösungen, mit dem Ergebnis $u(x) = -A \tanh(Ax/\epsilon - ct) + c$. Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ sind die Sprungbedingungen erfüllt. Die hydrodynamische Interpretation dieser Gleichung liefert eine Erklärung für die Beziehung zwischen den stehenden und laufenden Lösungen. Die Gleichungen sind nämlich invariant unter Galilei-Transformationen, wobei u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit darstellt. Es ist auch wichtig zu beobachten, daß die asymptotischen Werte der Lösungen der dissipativen Gleichungen für $x \rightarrow \pm\infty$ die Werte der Gleichung für $\epsilon = 0$ auf beiden Seiten der Unstetigkeit sind. Sie erfüllen also die Hugoniot-Bedingungen, Wenn wir diese Lösungen von weit weg sehen, dann ist durch die Dissipation die Unstetigkeit einfach ein wenig ausgeschmirt, während auf grösseren Skalen kaum eine Änderung zu sehen ist. Die Hugoniot-Bedingung und die Ungleichung $u_- > u_+$ sind die Spuren auf grossen Skalen der dissipativen Effekte. Letztere Bedingung ist ein Beispiel einer Entropiebedingung.

Im allgemeinen könnten wir sagen, daß eine schwache Lösung von (1) eine Entropielösung ist, oder daß sie die Entropiebedingung erfüllt, wenn sie in einem geeigneten Sinne als Grenzwert von Lösungen der Gleichung (125) ist. Das Problem damit ist, daß unser Ziel war, von den dissipativen Gleichungen wegzukommen. Mit dieser Definition kommt die ganze Komplexität der dissipativen Modelle zurück. Wir hätten gern ein einfaches Kriterium für Entropielösungen. Ausserdem sollte das Kriterium nicht nur für einfache stückweise glatte Lösun-

gen einen Sinn haben, was für die Lax-Bedingung gilt, sondern für allgemeine schwache Lösungen. Als nächstes diskutieren wir ein solches Kriterium, das mit der Idee der Entropie in der Hydrodynamik verwandt ist. Wir erinnern daran, daß eine Funktion U von \mathbf{R}^n nach \mathbf{R} *konvex* heißt wenn die zweite Ableitung von U positiv semidefinit ist. Wenn die zweite Ableitung positiv definit ist, heißt U *strikt konvex*. Eine konvexe Funktion $U(u)$ heißt *Entropie* für das System (1) wenn es Funktionen $G^i(u)$ gibt, so daß $\partial_t(U(u)) + \partial_i(G^i(u)) = 0$ für alle klassischen Lösungen u von (1).

$$\partial_t(U(u)) = DU(u)\partial_t u \quad (126)$$

$$= -DU(u)A^i(u)\partial_i u \quad (127)$$

$$= -(DG^i)(u)\partial_i u \quad (128)$$

Aus dieser Rechnung folgt die Beziehung $DU(u)A^i(u) = DG^i(u)$. Im skalaren Fall $k = 1$ ist jede konvexe Funktion eine Entropie, weil es immer Funktionen G^i gibt mit $(G^i)' = U'A^i$. Jede Funktion G^i ist bis auf eine additive Konstante eindeutig durch U bestimmt. Im allgemeinen ist die Existenz einer Entropie eine besondere Eigenschaft des Systems. Trotzdem besitzen viele Systeme, die in Anwendungen eine Rolle spielen, eine Entropie. Was hat eine solche Entropie mit dissipativen Näherungen zu tun? Wenn wir die dissipative Burgers-Gleichung so umformen, wie wir es schon im Spezialfall $\epsilon = 0$ getan haben, dann bekommen wir:

$$\partial_t v + (2/3)\partial_x(v^{3/2}) = \epsilon\partial_x^2 v - 2\epsilon(\partial_x u)^2 \quad (129)$$

Für $\epsilon > 0$ ist nicht mit unstetigen Lösungen zu rechnen, so daß diese Umformung unproblematisch ist. Das interessante passiert im Limes $\epsilon \rightarrow 0$. Es ist nämlich so, obwohl wir es im Moment nicht beweisen, daß in diesem Grenzfall nur der erste Term auf der Rechten Seite von (129) gegen Null geht, während der zweite einen negativen Beitrag leistet, der im Grenzfall überlebt. Dies ist ein Symptom dafür, daß nichtlineare Abbildungen im allgemeinen bezüglich schwacher Topologien nicht stetig sind. Ein konkretes Beispiel dieses Phänomens liefern die expliziten Lösungen, die wir vorhin betrachten haben. Die Frage, ob der Term in (129), der in den Ableitungen quadratisch ist, schwach gegen Null konvergiert, wird durch folgende Rechnung negativ beantwortet.

$$\epsilon \int \phi(x)\epsilon^{-2}(\cosh(x/\epsilon))^{-4} dx = \int \phi(\epsilon y)(\cosh y)^{-4} dy \quad (130)$$

Die Gleichung (129) wird im Limes durch eine Ungleichung ersetzt. Wenn wir eine allgemeinere Entropie genommen hätten, hätten wir einen Term $-\epsilon U''(\partial_x u)^2$ bekommen. Das Vorzeichen hier wird durch die Konvexität von U bestimmt, die besagt, daß $U'' \geq 0$. Dies motiviert die Definition einer Entropielösung.

Definition Eine schwache Lösung von (1) heißt *Entropielösung* wenn für jede Entropie U mit entsprechenden Flüssen G^i die Ungleichung

$$\partial_t(U(u)) + \partial_i(G^i(u)) \leq 0 \quad (131)$$

im schwachen Sinn gilt. Dies bedeutet, daß für jede nichtnegative glatte Funktion ϕ mit kompaktem Träger folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\int_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n} (\partial_t \phi U(u) + \partial_i \phi G^i(u)) dt dx + \int_{\mathbf{R}^n} \phi(0, x) U(u_0)(x) dx \geq 0 \quad (132)$$

Eine mathematische Entropie in diesem Sinne nimmt nie zu, während die physikalische Entropie in der Hydrodynamik nie abnimmt. Dies ist bloß eine Frage der Konventionen, und hat keine tiefere Bedeutung. Die Entropielösungen sind die ausgezeichneten schwachen Lösungen, nach denen wir gesucht haben. Wir weisen darauf hin, daß die Boltzmann-Entropie, die wir für das Carleman-Modell eingeführt haben, keine Entropie in diesem Sinne ist, obwohl beide durch den gleichen physikalischen Begriff motiviert sind.

Wir betrachten jetzt stückweise glatte Lösungen einer skalaren Erhaltungsgleichung in einer Raumdimension mit einer strikt konvexen Funktion F . Es ist schön, daß es für eine skalare Gleichung so viele Entropien gibt. Damit hängt aber scheinbar ein Nachteil zusammen. Man muß nämlich, um nachzuweisen, daß eine Funktion eine Entropielösung ist, unendlich viele Bedingungen nachweisen. Diese Gefahr wird durch folgendes Theorem für stückweise glatte Lösungen im eindimensionalen Fall abgewendet.

Theorem 6 Sei $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ eine strikt konvexe Funktion und u eine stückweise glatte schwache Lösung von (1). Wenn u die Entropiebedingung für eine strikt konvexe Entropie U erfüllt, dann erfüllt sie die Entropiebedingung für jede Entropie, und ist damit eine Entropielösung.

Beweis Sowie man die Rankine-Hugoniot-Bedingung aus der schwachen Form der Gleichung herleitet, kann man aus der Entropiebedingung eine Ungleichung für die Sprünge der entsprechenden Entropien herleiten. Die Ungleichung ist

$$[G(u)] \leq \gamma'[U(u)] \quad (133)$$

Es ist umgekehrt so, daß wenn, für eine stückweise glatte Lösung, die Ungleichung (133) für eine Entropie erfüllt ist, die Entropiebedingung für diese Entropie gilt. Die Kombination der Ungleichung (133) mit der Rankine-Hugoniot-Bedingung liefert:

$$\frac{F(u_+) - F(u_-)}{u_+ - u_-} [U(u_+) - U(u_-)] - [G(u_+) - G(u_-)] \geq 0 \quad (134)$$

Für einen festen Wert von u_- sei

$$E_U(v) = \frac{F(v) - F(u_-)}{v - u_-} [U(v) - U(u_-)] - [G(v) - G(u_-)] \quad (135)$$

Dann ist $E_U(u_+) \geq 0$ und $\lim_{u_+ \rightarrow u_-} E_U(u_+) = 0$. Jetzt wird die Ableitung der Funktion E_U berechnet.

$$\begin{aligned} E'_U(v) &= \frac{F'(v)(v - u_-) - F(v) + F(u_-)}{(v - u_-)^2} [U(v) - U(u_-)] \\ &+ \frac{F(v) - F(u_-)}{v - u_-} U'(v) - G'(v) \end{aligned} \quad (136)$$

Mit der Beziehung $G' = U'F'$ können wir die letzten zwei Terme in der Form

$$[F(v) - F(u_-) - (v - u_-)F'(v)] \frac{U'(v)}{v - u_-} \quad (137)$$

schreiben. Deshalb ist

$$E'_U(v) = -[F(u_-) - F(v) - (u_- - v)F'(v)] \frac{[U(u_-) - U(v) - U'(v)(u_- - v)]}{(v - u_-)^2} \quad (138)$$

Da F strikt konvex ist, ist

$$F(u_-) - F(v) - (u_- - v)F'(v) > 0 \quad (139)$$

und da U konvex ist, ist

$$U(u_-) - U(v) - (u_- - v)U'(v) \geq 0 \quad (140)$$

Deshalb impliziert die Konvexität von U , daß für $v \neq u_-$ die Ungleichung $E'_U(v) \leq 0$. Wenn U strikt konvex ist dann gilt $E'_U < 0$. Deshalb ist, wenn U_0 strikt konvex ist, $u_+ < u_-$ wenn und nur wenn $E_{U_0}(u_+) > 0$. Wenn U irgendeine Entropie ist (und infolgedessen konvex) impliziert $u_+ < u_-$ daß $E_U(u_+) \geq 0$. Die Entropiebedingung für U ist äquivalent mit der Bedingung $E_U(u_+) \geq 0$. Diese Aussagen zusammen liefern die Aussage des Theorems.

Es folgt aus diesem Beweis, daß unter der Bedingung, daß die Funktion F strikt konvex ist, eine Unstetigkeit die Entropiebedingung erfüllt ist wenn und nur wenn $u_+ < u_-$. Die Lax-Bedingung lautet

$$F'(u_-) \geq \gamma' \geq F'(u_+) \quad (141)$$

Der Zwischenwertsatz impliziert, daß $\gamma' = F'(u_*)$ mit u_* zwischen u_- und u_+ . Die strikte Konvexität von F zeigt dann, daß die Lax-Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn $u_+ < u_-$. Auf diese Weise wird eine Beziehung zwischen Entropielösungen und der Lax-Bedingung hergestellt.

Wir haben jetzt eine Bestätigung für die Lax-Bedingung im Falle einer skalaren Gleichung.

3.3 Entropie und symmetrisch hyperbolische Systeme

Es ist schon gesagt worden, daß, während es für eine skalare Gleichung immer Entropien gibt, ein System von Erhaltungsgleichungen im allgemeinen keine Entropie zu besitzen braucht. Um eine Entropie zu erhalten, muß man ein System von nk Gleichungen für $k+1$ Funktionen lösen. Um eine Chance zu haben im allgemeinen muß man $n+1 \geq nk$ verlangen, d.h. $n(k-1) \leq 1$. Dies ist nur möglich, wenn $k=1$ ist oder $n=1$ und $k=2$. Trotzdem haben Systeme, die in Anwendungen vorkommen, meistens eine Entropie. Wir können hier keine Erklärung für diesen Umstand anbieten. In diesem Abschnitt wird eine Beziehung zu einer anderen Eigenschaft hergestellt, die auch in den Anwendungen

überraschend häufig vorkommt. Dieser Abschnitt befasst sich ausschließlich mit klassischen Lösungen. Im nächsten Abschnitt geht es dann mit der Entwicklung der Theorie der schwachen Lösungen weiter.

Die andere Eigenschaft von Systemen, die hier betrachtet werden soll, ist daß sie symmetrisierbar sind. Das System

$$\partial_t u + A^i(u) \partial_i u = 0 \quad (142)$$

heißt *symmetrisch hyperbolisch* wenn die Matrizen $A^i(u)$ symmetrisch sind. Das System heißt symmetrisierbar wenn es eine glatte matrixwertige Funktion $R(u)$ gibt mit der Eigenschaft daß für alle u die Matrizen $R(u)$ und $R(u)A^i(u)$ symmetrisch sind und $R(u)$ positiv definit ist. Wenn wir jetzt die ursprüngliche Gleichung von links mit $R(u)$ multiplizieren, bekommen wir

$$R(u) \partial_t u + R(u) A^i(u) \partial_i u = 0 \quad (143)$$

Die Eigenschaften von $R(u)$ wurden so gewählt, so daß das neue System die allgemeine Definition eines symmetrisch hyperbolischen Systems erfüllt. Es ist deshalb nützlich, wenn ein System symmetrisierbar ist, weil man in dem Fall die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung beweisen kann. Ein symmetrisierbares System muß die Strukturbedingung (*) nicht unbedingt erfüllen. Es gibt trotzdem eine enge Beziehung zwischen diesen Eigenschaften. Wenn ein System symmetrisierbar ist, sind die Eigenwerte des Symbols reell, und es gibt ein vollständiges System von Eigenvektoren. Nur die Aussage über die Glattheit fehlt, um (*) zu bekommen.

Jetzt wird gezeigt, wie die Symmetrisierbarkeit eines Systems von Erhaltungsgleichungen mit der Existenz einer Entropie zusammenhängt. Zu diesem Zweck ist es nützlich, die Gleichungen in Komponenten auszuschreiben. Die erste Gleichung bekommt die Gestalt

$$\partial_t u^I + A^{iI}{}_J(u^K) \partial_i u^J = 0 \quad (144)$$

Es sei daran erinnert, daß im Falle eines Systems von Erhaltungsgleichungen, die Koeffizienten von der Form $A^{iI}{}_J = \partial F^{iI} / \partial u^J$ sind. Die Symmetriebedingung lautet dann $\partial F^{iI} / \partial u^J = \partial F^{iJ} / \partial u^I$. Aus dem Poincaré-Lemma folgt (lokal im Raum der Unbekannten), daß es Funktionen H^i gibt mit $F^{iI} = \partial H^i / \partial u^I$. Jetzt sei U die strikt konvexe Funktion, die durch $U(u) = (1/2) \sum_I (u^I)^2$ definiert ist. Wie jetzt gezeigt wird, ist diese Funktion eine Entropie mit Flüssen $G^i = \sum_I F^{iI} u^I - H^i$. Wir haben

$$\partial_i H^i = \sum_I (\partial H^i / \partial u^I) \partial_i u^I = \sum_I F^{iI} \partial_i u^I \quad (145)$$

und

$$\begin{aligned} \partial_i G^i &= \sum_I [\partial_i F^{iI} u^I + F^{iI} \partial_i u^I - F^{iI} \partial_i u^I] \\ &= \sum_I \partial_i F^{iI} \end{aligned} \quad (146)$$

Deshalb ist

$$\partial_i U(u) + \partial_i(G^i(u)) = \sum_I u^I [\partial_i u^I + \partial_i(F^{iI}(u))] = 0 \quad (147)$$

Das nächste Theorem betrifft symmetrisierbare Systeme.

Theorem 7 Sei U eine strikt konvexe Funktion. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß U eine Entropie für ein System von Erhaltungsgleichungen der Form (142) ist, ist daß die Matrizen mit Komponenten $(\partial^2 U / \partial u^I \partial u^K) A^{iI}{}_J$ für alle i symmetrisch sind.

Proof Die Größe $\partial^2 U / \partial u^I \partial u^J$ ist symmetrisch und positiv definit, da U strikt konvex ist. Da U eine Entropie ist, gilt die Beziehung $\partial U / \partial u^I A^{iI}{}_J = \partial G^i / \partial u^J$. Wenn wir diese Gleichung nach u ableiten, bekommen wir:

$$\partial^2 G^i / \partial u^J \partial u^K - (\partial U / \partial u^I) \partial^2 F^{iI} / \partial u^J \partial u^K = (\partial^2 U / \partial u^I \partial u^K) A^{iI}{}_J \quad (148)$$

Die linke Seite ist symmetrisch in den Indizes J und K und deshalb muß die rechte Seite die gleiche Eigenschaft haben. Umgekehrt, impliziert die Symmetriebedingung, daß der Ausdruck $\partial / \partial u^K (\partial U / \partial u^I A^{iI}{}_J)$ in J und K symmetrisch ist. Mit Poincaré schließt man daraus, daß es Funktionen G^i gibt derart, daß $\partial G^i / \partial u^J = \partial U / \partial u^I A^{iI}{}_J$. Damit ist das Theorem bewiesen.

Dieses Theorem zeigt, daß die Existenz einer konvexen Entropie impliziert, daß (142) symmetrisierbar ist, mit der Wahl $R = D^2 U$.

Es gibt eine andere Möglichkeit, um zu versuchen, aus dem System (142) ein symmetrisch hyperbolisches System zu produzieren, nämlich durch eine Variablentransformation. Sei $v^I = \Phi^I(u^J)$ mit $u^I = \Psi^I(v^J)$. Dann impliziert (142) das System

$$(\partial \Psi^I / \partial v^J)(v) \partial_i v^J + A^{iI}{}_J(\Psi(v)) (\partial \Psi^J / \partial v^K)(v) \partial_i v^K = 0 \quad (149)$$

Wenn $D\Psi$ symmetrisch und positiv definit ist und $A^i D\Psi$ symmetrisch für alle i , dann bekommen wir ein symmetrisch hyperbolisches System. Die Existenz einer Transformation Ψ mit diesen Eigenschaften ist äquivalent mit der Existenz einer strikt konvexen Entropie, wie wir jetzt zeigen. Wir nehmen an, daß eine solche Abbildung existiert, mit der inversen Abbildung Φ . Die Symmetrie der Ableitung $D\Psi$ impliziert, daß $\Psi^I = \partial q / \partial v^I$ für eine Abbildung $q : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$. Die Symmetrie von $A^i(\Psi(v)) D\Psi(v) = D(F^i(\Psi(v)))$ zeigt, daß es Funktionen p_i gibt mit der Eigenschaft, daß $F^{iI}(\Psi(v)) = (\partial p_i / \partial v^I)(v)$. Die Tatsache, daß $D\Psi$ positiv definit ist, impliziert daß q strikt konvex ist. Sei

$$\begin{aligned} U(u) &= \sum_I \Phi^I(u) u^I - q(\Phi(u)) \\ G^i(u) &= \sum_I \Phi^I(u) F^{iI}(u) - p_i(\Phi(u)) \end{aligned} \quad (150)$$

In dem wir diese Beziehungen differenzieren, bekommen wir

$$(\partial U / \partial u^I)(u) = \Phi^I(u) + (\partial \Phi^J / \partial u^I)(u) u^J - (\partial q / \partial v^J)(\Phi(u)) (\partial \Phi^J / \partial u^I)(u)$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi^I(u) \\
(\partial G^i / \partial u^I)(u) &= \sum_J [(\partial \Phi^J / \partial u^I)(u) F^{iJ}(u) + \Phi^J(u) (\partial F^{iJ} / \partial u^I)(u)] \\
&\quad - (\partial p_i / \partial u^J)(\Phi(u)) (\partial \Phi^J / \partial u^I)(u) \\
&= \sum_J \Phi^J(u) (\partial F^{iJ} / \partial u^I)(u)
\end{aligned} \tag{151}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß U eine Entropie ist, mit Flüssen $G^i(u)$. Ausserdem ist

$$\partial^2 U / \partial u^I \partial u^J = (\partial \Phi^I / \partial u^J)^{-1} \tag{152}$$

so daß U strikt konvex ist.

Wenn, umgekehrt, U eine strikt konvexe Entropie ist, definieren wir $v^I = \Phi^I(u) = \partial U / \partial u^I$ und

$$\begin{aligned}
q(v) &= \sum_I v^I \Psi^I(v) - U(\Psi(v)) \\
p_i(v) &= \sum_I v^I F^{iI}(\Psi(v)) - G^i(\Psi(v))
\end{aligned} \tag{153}$$

Die Ableitung nach v liefert:

$$\begin{aligned}
\partial q / \partial v^I &= \Psi^I(v) + \sum_J [v^J (\partial \Psi^J / \partial v^I) - (\partial U / \partial u^J) (\partial \Psi^J / \partial v^I)] \\
&= \Psi^I(v) \\
\partial p_i / \partial v^I &= F^{iI}(\Psi(v)) + \sum_J v^J (\partial F^{iJ} / \partial u^K) (\partial \Psi^K / \partial v^I) \\
&\quad - (\partial G^i / \partial u^K) (\partial \Psi^K / \partial v^I) \\
&= F^{iI}(\Psi(v))
\end{aligned} \tag{154}$$

Wir sehen, daß die Variablentransformation ein symmetrisches System produziert, da die Matrizen, die symmetrisch sein sollen, die Matrizen der zweiten Ableitungen von p und q_i sind. Die Matrix, die positiv definit sein soll, hat diese Eigenschaft, weil die Matrix der zweiten Ableitungen von U sie hat.

3.4 Gesetz der gleichen Flächen

In einem früheren Abschnitt haben wir ein konkretes Beispiel einer Lösung der Burgers-Gleichung gerechnet. Wir konnten aber nichts darüber aussagen, was passiert, nachdem die klassische Lösung aufhört. Es ist möglich mit Hilfe des Gesetzes der gleichen Flächen weiterzukommen. Wir betrachten wieder die Kurve, die sich in der (x, u) -Ebene entwickelt. Sie teilt die Halbebene $u \geq 0$ in zwei Komponenten. Die Komponente, die den Ursprung enthält nennen wir die erste Komponente. Diese erste Komponente liegt unterhalb der Kurve, so lange eine klassische Lösung existiert. Die Burgers-Gleichung impliziert, daß die Gesamtfläche der ersten Komponente zeitunabhängig ist. So lange die klassische

Lösung existiert ist diese Aussage der übliche Erhaltungssatz für die Burgers-Gleichung. (Zwar hat die Lösung, die wir jetzt betrachten, keinen räumlich kompakten Träger. Sie fällt aber im Unendlichen schnell genug ab, damit man die analoge Rechnung leicht rechtfertigen kann.) Nach $t = t_*$ brauchen wir ein anderes Argument. Die erste Komponente ist eine Vereinigung von horizontalen Geraden. Jede Gerade behält im Laufe der Zeitentwicklung ihre Länge, da beide Enden sich mit der gleichen Geschwindigkeit (Höhe der Geraden) bewegen. Nennen wir die Endpunkte $x_1(u)$ und $x_2(u)$. Dann ist die Fläche, für die wir uns interessieren $\int_0^1 x_1(u) - x_2(u) du$, und hängt nicht von t ab.

Jetzt wird eine unstetige Funktion folgendermassen konstruiert. Wir wählen eine Kurve $x = \gamma(t)$ in der (t, x) -Ebene. Für $t > t_*$ gibt es Punkte x so daß mehrere Punkte auf der Lösungskurve von der Form (x, u) sind. Es sind entweder zwei oder drei Punkte. Wir schreiben $u_-(t, x)$ für den größten Wert, der dabei vorkommt, und $u_+(t, x)$ für den kleinsten. Wenn es nur einen möglichen Wert von u zu einem gegebenen Wert von x gibt, dann ist $u_- = u_+$ dort. Jetzt definieren wir:

$$\bar{u}(t, x) = u_-(t, x), \quad x < \gamma(t) \quad (155)$$

$$\bar{u}(t, x) = u_+(t, x), \quad x > \gamma(t) \quad (156)$$

Wo diese Funktion stetig ist, erfüllt sie die Burgers-Gleichung. Jetzt muß nur noch kontrolliert werden, unter welchen Umständen die Sprungbedingung erfüllt ist. Diese Sprungbedingung wird genau dann gelten, wenn die Gesamtfläche unter der Kurve $u = \bar{u}(t, x)$ konstant ist. Wenn die ursprüngliche Kurve durch die unstetige ersetzt wird, dann wird ein Stück von der Fläche weggenommen, und ein Stück hinzugefügt. Damit die Sprungbedingung erfüllt ist, müssen diese zwei Stücke gleich groß sein. Dies ist das Gesetz der gleichen Flächen. Sie bestimmt eine eindeutige Kurve $\gamma(t)$. Auf diese Weise, bekommen wir eine globale schwache Lösung, die die ursprüngliche klassische Lösung fortsetzt. Da $u_- > u_+$ ist an der Sprungstelle, ist diese Lösung auch eine Entropielösung.

Die Größe des Sprungs geht gegen Null wenn $t \rightarrow t_*$ von oben. Die Geschwindigkeit der Stoßwelle konvergiert gegen die charakteristische Geschwindigkeit, nämlich den Grenzwert von u von $t < t_*$ kommend. Auf dieser Weise bekommen wir ein genaues Bild der Situation, wo eine Unstetigkeit in dieser Lösung entsteht. Wir wissen allerdings nicht, ob diese schwache Lösung die einzige Entropielösung mit den gegebenen Anfangsdaten ist. Es gibt einen Eindeutigkeitssatz der zeigt daß dies der Fall ist.

3.5 Das Riemann-Problem

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie eine Stoßwelle entstehen kann. Was passiert nun wenn eine Lösung zwei Stoßwellen enthält, und diese aufeinander treffen? Ist es möglich, die Wechselwirkung zu beschreiben? Die einfachste Situation ist, wenn man eine stückweise konstante Lösung der Burgers-Gleichung hat. Die Unstetigkeiten liegen dann auf Geraden. Nehmen wir an, daß die Unstetigkeitskurven die Form $x = t - 1$ und $x = 1 - t$ haben. Zunächst wird eine

Lösung nur auf dem Gebiet $t < 1$ definiert. Wenn die konstanten Werte auf den drei Gebieten von links nach rechts 2, 0 und -2 sind, sind die Sprungbedingungen und Lax-Bedingungen erfüllt. Es handelt sich also um eine Entropielösung. Was passiert für $t > 1$? Die Anfangsdaten bei $t = 1$ sind 2 für $x < 0$ und -2 für $x > 0$. Wir wissen, wie eine entsprechende Entropielösung konstruiert werden kann. Diese Lösung hat eine Unstetigkeit bei $x = 0$, den Wert 2 für $x < 0$ und den Wert -2 für $x > 0$. In diesem Fall verschmelzen die Stoßwellen. Es können aber auch kompliziertere Dinge passieren.

Diese Diskussion motiviert die Untersuchung des Riemann-Problems, wo man versucht, schwache Lösungen eines Systems von Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension zu Daten von einem sehr speziellen Typ zu finden. Sie sind von der Form $u = u_-$ für $x < 0$ und $u = u_+$ für $x > 0$, wo u_- und u_+ konstant sind. Man kann sich vorstellen, daß diese Daten durch das Zusammenreffen zweier Stoßwellen entstehen, wie im Beispiel. Man kann aber auch die vorgeschichte der Lösung vergessen, und das Riemann-Problem für sich betrachten. Das Riemann-Problem ist auch in einem anderen Zusammenhang wichtig. Das Auftreten von Unstetigkeiten in Lösungen von Erhaltungsgleichungen ist ein großes Problem, wenn man diese numerisch berechnen möchte. Herkömmliche numerische Methoden, die für die Berechnung von glatten Lösungen gut sind, können oft schlecht mit unstetigen Lösungen fertig werden. Deshalb hat man besondere numerische Methoden entwickelt, um Lösungen mit Stoßwellen verläßlich und genau berechnen zu können. Manche benutzen die Theorie des Riemann-Problems wesentlich. Es gibt auch eine wichtige Methode, um Existenzsätze zu beweisen (die Methode von Glimm), wo das Riemann-Problem eine zentrale Rolle spielt.

Eine wichtige Einsicht in die Struktur des Riemann-Problems wird gewonnen, wenn man die Eindeutigkeit der Lösung für vorgeschriebene Anfangsdaten annimmt, und versucht daraus Schlüsse zu ziehen. Wenn $u(t, x)$ eine Lösung von (1) ist mit Anfangsdatum $u_0(x)$ und a eine Konstante, ist $u(at, ax)$ eine Lösung mit Anfangsdatum $u_0(ax)$. Nun sind die Anfangsdaten für das Riemann-Problem unter dieser Transformation invariant. Als eine Folge der Eindeutigkeit, müssen die entsprechenden Lösungen die gleiche Eigenschaft haben. Selbst wenn wir nichts über Eindeutigkeit wissen, können wir uns durch diese Beobachtung dazu inspirieren lassen, Lösungen zu suchen, die diese Invarianz haben. Auf diese Weise, werden wir dazu geführt, Lösungen der Form $u(t, x) = U(t/x)$ zu betrachten. Diese Lösungen sind offenbar einfache Wellen. Die allgemeine Theorie von einfachen Wellen impliziert, daß das Bild von U in einer Verdünnungskurve liegt. Diese Lösungen sind in der Tat die schon erwähnten Verdünnungswellen. Wenn wir $\sigma = t/x$ in die allgemeine Formel einsetzen, sehen wir, daß x/t ein Eigenwert von $A(U(t/x))$ sein muß. Z. B. im Falle der Burgers-Gleichung bekommen wir die Beziehung $u(t, x) = U(t/x) = x/t$. Diese Lösung kann benutzt werden, um das Riemann-Problem für die Burgers-Gleichung zu lösen im Fall wo $u_- < u_+$. Die Lösung ist:

$$u(t, x) = u_-, \quad x \leq u_- t \tag{157}$$

$$u(t, x) = x/t, \quad u_- t \leq x \leq u_+ t \tag{158}$$

$$u(t, x) = u_+, \quad x \geq u_+ t \quad (159)$$

Sie ist stetig und erfüllt deshalb automatisch die Sprungbedingungen (es gibt keine Sprünge) und die Entropiebedingung. Damit eine solche Formel tatsächlich eine Lösung definiert, muß u eine steigende Funktion von x sein bei einem festen Wert von t . Deshalb existiert eine solche Lösung nur unter der Einschränkung $u_- < u_+$. Im allgemeinen haben die Verdünnungskurven eine ausgezeichnete Orientierung, vorausgesetzt, daß das System für den entsprechenden Eigenvektor echt nichtlinear ist. Wenn wir die Konvention so festlegen, daß die positive Orientierung so ist, daß der Eigenwert in dieser Richtung zunimmt, dann bekommen wir folgende allgemeine Regel: um eine Verdünnungswelle zu konstruieren, die die konstanten Zustände u_- und u_+ miteinander verbindet, muß es möglich sein von u_- nach u_+ längs einer positiv orientierten Verdünnungskurve zu kommen.

Wenn $u_- > u_+$ kann das Riemann-Problem für die Burgers-Gleichung durch eine Stoßwelle mit Geschwindigkeit $(1/2)(u_- + u_+)$ gelöst werden. Da der Fall mit $u_- = u_+$ trivial zu lösen ist, haben wir jetzt Lösungen zu allen Daten für das Riemann-Problem im Fall der Burgers-Gleichung. Für andere Gleichungen kann die Situation viel komplizierter sein. Z. B., kann es notwendig sein, Stoßwellen mit Verdünnungswellen zu kombinieren.

3.6 Die Hugoniot-Kurven

Ziel dieses Abschnittes ist es, allgemeine Aussagen über das Verhalten der Hugoniot-Kurven herzuleiten. Diese betreffen hauptsächlich den Fall von schwachen Stoßwellen, d.h. den Fall, wo die Sprünge klein sind. Wir betrachten ein strikt hyperbolisches System in einer Raumdimension. Die Rankine-Hugoniot-Bedingung ist $[F(u)] = S[u]$. Wir halten u_- fest und versuchen u_+ und S zu finden, so daß die Sprungbedingungen erfüllt sind. Es gibt k Gleichungen für $k + 1$ Unbekannten und es ist vernünftig, eine eindimensionale Lösungsmenge zu erwarten. Wir werden in der Tat sehen, daß der Teil dieser Menge, wo u_+ hinreichend nahe bei u_- ist, eine Vereinigung von k Kurven ist. Nehmen wir an, wir hätten eine solche Kurve, parametrisiert durch θ . Die Kurve ist dann von der Form $(u_+(\theta), S(\theta))$. Sei $u_+(0) = u_-$. Wenn die Sprungbedingung nach θ differenziert wird, und anschließend $\theta = 0$ gesetzt, ist das Ergebnis $A(u_-)u'_+ = S(0)u'_+$. Deshalb ist $S(0)$ einer der k Eigenwerte von A und u'_+ ein entsprechender Eigenvektor.

Jetzt wird der Spieß umgedreht. Es wird gezeigt, daß es zu jedem Eigenwert λ von $A(u_-)$ eine glatte Kurve $u_+(\theta)$ mit $u_+(0) = u_-$ und eine reellwertige Funktion $S(\theta)$ mit $S(0) = \lambda$ gibt, so daß die Hugoniot-Bedingung auf diesen Kurven erfüllt ist. Für u_+ in einer hinreichend kleinen Umgebung von u_- ist sie nur auf diesen Kurven erfüllt. Dazu wird der Satz über implizite Funktionen verwendet.

Der Sprung in $F(u)$ kann in folgender Form geschrieben werden:

$$F(u_+) - F(u_-) = \int_0^1 \frac{d}{ds} F(u_- + s(u_+ - u_-)) ds$$

$$= \left(\int_0^1 A(u_- + s(u_+ - u_-)) ds \right) (u_+ - u_-) \quad (160)$$

Mit der Definition

$$A(u, v) = \int_0^1 A(u + s(v - u)) ds \quad (161)$$

kann die Sprungbedingung in der Form

$$(A(u_-, u_+) - S(u_-, u_+))(u_+ - u_-) = 0 \quad (162)$$

geschrieben werden. Die Funktion $A(u_-, u_-) = A(u_-)$ hat k verschiedene Eigenwerte $\lambda_1(u_-) < \dots < \lambda_k(u_-)$. Deshalb hat $A(u_-, u_+)$ die gleiche Eigenschaft für u_+ in einer Umgebung von u_- , weil paarweise verschiedene Eigenwerte einer Matrix, die glatt von einem Parameter abhängt, auch glatt vom Parameter abhängen. Seien $l_i(u_-, u_+)$ die dazugehörigen dualen Eigenvektoren, d.h. die Lösungen der Gleichung $l_i(u_-, u_+)^T A(u_-, u_+) = \lambda_i(u_-, u_+) l_i(u_-, u_+)^T$. Die Hugoniot-Bedingungen sind mit folgenden Bedingungen äquivalent:

$$S(u_-, u_+) = \lambda_i(u_-, u_+) \quad (163)$$

$$l_j(u_-, u_+)^T (u_+ - u_-) = 0, \quad j \neq i \quad (164)$$

Die erste Gleichung zeigt, daß S glatt von u_+ abhängt. Die anderen Gleichungen sind $k - 1$ Bedingungen für k Größen. Die Linearisierung dieses Gleichungssystems um u_- ist surjektiv, da die l_i linear unabhängig sind. Mit dem Satz über implizite Funktionen schließen wir, daß die Lösung für einen festen Wert von i eine glatte Kurve ist. Damit ist die Existenz der Hugoniot-Kurven bewiesen.

Wir haben schon gesehen, daß die Hugoniot-Kurve und die Verdünnungskurve durch u_- , die zum gleichen Eigenwert $\lambda_i(u_-)$ gehören, tangential sind - sie haben beide einen Tangentenvektor proportional zu $r_i(u_-)$. Es ist möglich noch detailliertere Informationen über das Verhalten dieser Kurven in der Nähe von u_- zu bekommen. Sei $\Psi_i(\theta)$ die Hugoniot-Kurve zu λ_i , so parametrisiert, daß $\Psi_i(0) = u_-$ und $\Psi_i'(0) = r_i(u_-)$. Um die Notation zu vereinfachen, sei

$$A_i(\theta) = A(\Psi_i(\theta)) \quad (165)$$

$$S_i(\theta) = \lambda_i(u_-, \Psi_i(\theta)) \quad (166)$$

Die Ableitung der Sprungbedingung $S_i(\Psi_i - u_-) = F(\Psi_i) - F(u_-)$ nach θ liefert

$$S_i'(\Psi_i - u_-) + S_i \Psi_i' = A_i \Psi_i' \quad (167)$$

und

$$S_i''(\Psi_i - u_-) + 2S_i' \Psi_i' + S_i \Psi_i'' = A_i' \Psi_i' + A_i \Psi_i'' \quad (168)$$

Wenn wir in der letzten Beziehung $\theta = 0$ setzen, erhalten wir

$$(A_i(u_-) - \lambda_i(u_-)) \Psi_i''(0) = -A_i'(0) r_i(u_-) + 2S_i'(u_-) r_i(u_-) \quad (169)$$

Andererseits liefert die Ableitung der Beziehung $A_i r_i(\Psi_i) = \lambda_i(\Psi_i) r_i(\Psi_i)$ die Gleichung

$$A'_i r_i(\Psi_i) + A_i D r_i(\Psi_i) \cdot \Psi'_i = D \lambda_i(\Psi_i) \cdot \Psi'_i r_i(\Psi_i) + \lambda_i(\Psi_i) D r_i(\Psi_i) \cdot \Psi'_i \quad (170)$$

und für $\theta = 0$

$$(A_i(u_-) - \lambda_i(u_-)) D r_i(u_-) \cdot r_i(u_-) + A'_i(0) r_i(u_-) - D \lambda_i(u_-) \cdot r_i(u_-) \cdot r_i(u_-) = 0 \quad (171)$$

Wenn wir (171) von (169) subtrahieren, bekommen wir

$$\begin{aligned} & (A_i(u_-) - \lambda_i(u_-))(\Psi''_i(0) - D r_i(u_-) \cdot r_i(u_-)) \\ & + D \lambda_i(u_-) \cdot r_i(u_-) \cdot r_i(u_-) = 2 S'_i(0) r_i(u_-) \end{aligned} \quad (172)$$

Multiplikation von links mit $l_i(u_-)^T$ gibt

$$S'_i(0) = (1/2) D \lambda_i(u_-) \cdot r_i(u_-) \quad (173)$$

Diese Beziehung kann jetzt in (172) eingesetzt werden, mit dem Ergebnis

$$(A_i(u_-) - \lambda_i(u_-))(\Psi''_i(0) - D r_i(u_-) \cdot r_i(u_-)) = 0 \quad (174)$$

Daraus folgt die Existenz einer reellen Zahl β derart, daß

$$\Psi''_i(0) = D r_i(u_-) \cdot r_i(u_-) + \beta r_i(u_-) \quad (175)$$

Jetzt führen wir einen neuen Parameter ϵ durch die Beziehung $\theta = \epsilon - (1/2)\beta\epsilon^2$ ein. Dann ist

$$S_i(u_-, \Psi_i(\epsilon)) = \lambda_i(u_-) + (\epsilon/2) D \lambda_i(u_-) \cdot r_i(u_-) + O(\epsilon^2) \quad (176)$$

und

$$\Psi_i(\epsilon) = u_- + \epsilon r_i(u_-) + (\epsilon^2/2) D r_i(u_-) \cdot r_i(u_-) + O(\epsilon^3) \quad (177)$$

Ausserdem ist

$$\lambda_i(\Psi_i(\epsilon)) = \lambda_i(u_-) + \epsilon D \lambda_i(u_-) \cdot r_i(u_-) + O(\epsilon^2) \quad (178)$$

und

$$S_i(u_-, \Psi_i(\epsilon)) = (1/2)(\lambda_i(u_-) + \lambda_i(\Psi_i(\epsilon))) + O(\epsilon^2) \quad (179)$$

Wir sehen, daß, bis auf einen Rest der Ordnung ϵ^2 , die Propagationsgeschwindigkeit der Unstetigkeit mit dem Mittelwert der Charakteristischen Geschwindigkeiten auf beiden Seiten der Unstetigkeit übereinstimmt, wenn die Unstetigkeit klein ist. Die Entwicklung für Ψ_i zeigt, daß eine Hugoniot-Kurve und die entsprechende Verdünnungskurve bis zur zweiten Ordnung in ϵ übereinstimmen. Dies verschärft die Aussage, daß diese Kurven tangential sind.

In einem früheren Abschnitt wurde gezeigt, wie die Lax-Bedingung im Falle einer skalaren Gleichung durch eine dissipative Näherung gerechtfertigt werden kann. Für ein System in einer Dimension wäre es viel schwieriger, etwas entsprechendes zu tun. Wir können aber zumindest eine Lax-Bedingung

für ein strikt hyperbolisches System definieren, und als Auswahlkriterium für Lösungen verwenden. Die Bedingung ist wieder von der Art, daß Charakteristiken nicht aus Unstetigkeiten herauskommen sollten. Die Bedingung kann folgendermaßen algebraisch ausgedrückt werden. Wenn wir eine Unstetigkeit mit Zuständen $u_-(t, x)$ bzw. $u_+(t, x)$ links bzw. rechts der Unstetigkeit haben, dann soll $\lambda_i(u_-) \geq S_i(u_-, u_+) \geq \lambda_i(u_+)$, wo u_- und u_+ durch die i -te Hugoniot-Kurve verbunden werden, und $S_i(u_-, u_+)$ die entsprechende Geschwindigkeit der Unstetigkeit ist. Dies kann auch geometrisch durch eine Orientierung der Hugoniot-Kurven berücksichtigt werden. Wir orientieren diese Kurven so, daß die positive Richtung die ist, wo der entsprechende Eigenwert abnimmt. Dann muß, damit die Lax-Bedingung gilt, das Stück der Hugoniot-Kurve, die u_- mit u_+ verbindet, positiv orientiert sein.

3.7 Das Riemann-Problem in einem Beispiel

In diesem Abschnitt wird das Riemann-Problem in einem Beispiel gelöst. Folgendes System kommt aus der Chromatographie.

$$\partial_t u_1 + \partial_x(u_1/(1 + u_1 + u_2)) = 0 \quad (180)$$

$$\partial_t u_2 + \partial_x(u_2/(1 + u_1 + u_2)) = 0 \quad (181)$$

Wegen der Interpretation müssen u_1 und u_2 positiv sein. Die Eigenwerte von $A(u)$ sind

$$\lambda_1(u) = 1/(1 + u_1 + u_2)^2 \quad (182)$$

$$\lambda_2(u) = 1/(1 + u_1 + u_2) \quad (183)$$

mit entsprechenden Eigenvektoren

$$r_1(u) = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}(-u_1, -u_2) \quad (184)$$

$$r_2(u) = (1/\sqrt{2})(1, -1) \quad (185)$$

Das System ist echt nichtlinear für den ersten Eigenvektor und linear entartet für den zweiten. Die Verdünnungskurven sind von der Form $u + \sigma r_1(u)$ und $u + \sigma r_2(u)$. Sie sind also Geraden in der u -Ebene. In diesem Beispiel sind die Hugoniot-Kurven und die Verdünnungskurven identisch. Dies ist nicht typisch, sondern eine spezielle Eigenschaft dieses Systems. Wenn u_+ und u_- auf einer Verdünnungskurve liegen, dann ist:

$$\begin{aligned} F(u_+) - F(u_-) &= \int_0^1 (d/dt)(F(tu_+ + (1-t)u_-))dt \\ &= \int_0^1 DF(tu_+ + (1-t)u_-)(u_+ - u_-)dt \\ &= \left[\int_0^1 \lambda_i(tu_+ + (1-t)u_-)dt \right] (u_+ - u_-) \end{aligned} \quad (186)$$

wo λ_i der entsprechende Eigenwert ist. Es ist zu beachten, daß, obwohl die Verdünnungskurven und Hugoniot-Kurven aufeinanderliegen, die ausgezeichneten Orientierungen dieser Kurven, die in früheren Abschnitten im echt nicht-linearen Fall definiert wurden, für den ersten Eigenvektor hier entgegengesetzt sind.

Da das System für den zweiten Eigenvektor linear entartet ist, sind die Unstetigkeiten, die mit diesem Eigenwert verbunden sind, keine richtigen Stoßwellen. Es gibt auch keine Verdünnungswellen, die mit diesem Eigenvektor verbunden sind. Die Unstetigkeiten in diesem Fall heißen Kontakt-Diskontinuitäten und bewegen sich mit einer Geschwindigkeit, die durch den entsprechenden Eigenwert gegeben wird. Die Größe des Sprungs wird durch die Hugoniot-Bedingung nicht eingeschränkt, und es gibt keine ausgezeichnete Orientierung für diese Kurven.

Jetzt möchten wir das Riemann-Problem für das System (180) lösen, mit konstanten Zuständen u_- und u_+ . Es gibt im allgemeinen zwei Punkte, wo die Verdünnungskurven durch u_+ und u_- (die auch die Hugoniotkurven sind) sich schneiden. Diese Punkte sind die Lösungen u^* der Gleichungen

$$u_1^* + u_2^* = (u_+)_1 + (u_+)_2 \quad (187)$$

$$u_1^*(u_-)_2 = (u_-)_1 u_2^* \quad (188)$$

oder die Gleichungen, die daraus hervorgehen, in dem man u_+ und u_- miteinander vertauscht. Es ist aber nicht so, daß beide Punkte zu konsistenten Lösungen des Riemann-Problems führen. Es muß auch die zusätzliche Bedingung erfüllt sein, daß die Welle, die man zuerst treffen soll, wenn man von links kommt, langsamer ist als die andere. Hier spielt die Ungleichung $\lambda_1 < \lambda_2$ eine Rolle. Die einzigen konsistenten Lösungen werden jetzt explizit aufgeschrieben. Wenn $(u_-)_1 + (u_-)_2 > (u_+)_1 + (u_+)_2$, dann besteht die Lösung aus einer Verdünnungswelle und einer Kontakt-Diskontinuität. Explizit wird die Lösung $u(t, x)$ folgendermaßen gegeben:

$$u_- \quad , \quad x/t < \lambda_1(u_-) \quad (189)$$

$$su^* + (1-s)u^- \quad , \quad x/t = \lambda_1(su^* + (1-s)u^-), \quad s \in [0, 1] \quad (190)$$

$$u^* \quad , \quad \lambda_1(u^*) < x/t < \lambda_2(u^+), \quad (191)$$

$$u^+ \quad , \quad x/t \geq \lambda_2(u^+) \quad (192)$$

Wenn $(u_-)_1 + (u_-)_2 < (u_+)_1 + (u_+)_2$ besteht sie aus einer Stoßwelle (die die Lax-Bedingung erfüllt) und einer Kontakt-Diskontinuität. Explizit:

$$u_- \quad , \quad x/t < S_1(u_-, u^*) \quad (193)$$

$$u^* \quad , \quad S_1(u_-, u^*) < x/t < \lambda_2(u_+) \quad (194)$$

$$u_+ \quad , \quad x/t \geq \lambda_2(u_+) \quad (195)$$

Im entarteten Fall, wo $(u_-)_1 + (u_-)_2 = (u_+)_1 + (u_+)_2$, gibt es nur eine Kontakt-Diskontinuität.

4 Weitere Themen

Für den Rest der Vorlesung habe ich kein Skript geschrieben. Folgende Themen wurden behandelt:

1. Funktionen von beschränkter Variation nach [8], Kapitel 1.
2. Existenz- und Eindeutigkeit von Entropielösungen einer skalaren Erhaltungsgleichung in d Dimensionen nach [4], Kapitel 2.
3. Asymptotisches Verhalten von Entropielösungen einer skalaren Erhaltungsgleichung in einer Dimension nach [3], Kapitel 3.

Literatur

- [1] Chen, J. (1997) Conservation laws for relativistic fluid dynamics. Arch. Rat. Mech. Anal. 139, 377-398.
- [2] Conway, E. D. (1977) The formation and decay of shocks for a conservation law in several dimensions. Arch. Rat. Mech. Anal. 64, 135-151.
- [3] Evans, L. C. (1998) Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence.
- [4] Godlewski, E., Raviart, P.-A. (1991) Hyperbolic systems of conservation laws. Ellipses, Paris.
- [5] Godlewski, E., Raviart, P.-A. (1996) Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Springer, Berlin.
- [6] Li Ta-Tsien (1994) Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. Wiley, New York.
- [7] Lions, P.-L. (1996) Mathematical Topics in Fluid Mechanics I. Incompressible Models. Oxford University Press, Oxford.
- [8] Lojasiewicz, S. (1988) An introduction to the theory of real functions. Wiley, New York.
- [9] Majda, A. (1984) Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. Springer, Berlin.
- [10] Taylor, M. E. (1996) Partial Differential Equations III. Nonlinear Equations. Springer, Berlin.