Allgemeine Relativitätstheorie

Alan D. Rendall

July 22, 2008

1 Einleitung

Die allgemeine Relativitätstheorie (AR) ist eine physikalische Theorie, die Gravitation, Raum und Zeit miteinander verbindet. Ziel dieser Vorlesung ist es, die mathematischen Strukturen die in der AR verwendet werden zu erklären und interessante mathematische Ergebnisse auf diesem Gebiet darzustellen. Der Standpunkt in dieser Vorlesung ist der des Mathematikers, aber die Wahl der Themen wird massgeblich von den physikalischen Anwendungen bestimmt. Die Techniken, die hier angewendet werden kommen aus der Differentialgeometrie und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Die Gravitation, die zu einer gegenseitigen Anziehung aller materieller Körper führt, ist eine der fundamentalen Wechselwirkungen der Physik. Die erste allgemeine Theorie, die die Gravitation beschreibt, ist die von Newton. Sie ist heute noch für viele Zwecke ausreichend. Es gibt aber seit 1916 auch eine andere Theorie der Gravitation die unter bestimmten Umständen genauere Vorhersagen liefert, nämlich die von Einstein. Es handelt sich um die allgemeine Relativitätstheorie. Diese Theorie führte zu einem neuen Bild von Raum und Zeit, die dabei zur Raumzeit vereinigt werden. Die Raumzeit ist ein Begriff, der schon in der speziellen Relativitätstheorie (SR) vorkommt, wo die Gravitation nicht berücksichtigt wird. In der AR wird das Gravitationsfeld mit einer Krümmung der Raumzeit in Verbindung gebracht. Die spezielle Relativitätstheorie, die die Gravitation nicht beschreibt, entspricht einer flachen Raumzeit, dem Minkowskiraum. Wenn man ein Problem in der AR bearbeitet ist es oft nützlich, mit analogen Problemen in der SR oder der newtonschen Gravitationstheorie zu vergleichen, da diese einfacheren Modelle nützliche Intuitionen liefern können. Eine andere wertvolle Vergleichsmöglichkeit ist die mit der maxwellschen Theorie des Elektromagnetismus.

Unter welchen Umständen braucht man die AR, um physikalische Systeme zu beschreiben? Wenn Materie sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die nahe der Lichtgeschwindigkeit ist, dann wird die SR benötigt. Wenn die Gravitation auch noch eine Rolle spielt, ist die AR gefragt. Immer wenn sehr starke Gravitationsfelder auftreten ist die AR für die Beschreibung des Systems unerlässlich. Diese Bedingungen, sehr hohe Geschwindigkeiten bei selbstgravitierender Materie und sehr starke Gravitationsfelder, kommen vor allem in der Astrophysik vor. Besonderheiten, die dabei auftreten sind schwarze Löcher und die Anfangssingularität des Universums (Urknall). Die AR spielt auch eine Rolle wenn unter milderen Bedingungen Messungen besonders hoher Präzision notwendig sind. Es gibt eine praktische Anwendung: das Navigationssystem GPS (Global Positioning System) wäre ohne die AR unmöglich.

Die fundamentalen Gleichungen der AR sind die Einsteingleichungen. Es handelt sich um ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, die die Wechselwirkung zwischen der Geometrie der Raumzeit und der darin enthaltenen Materie beschreiben. Da die Theorie vor allem die Wechselwirkungen von Massen beschreibt, müssen wir, um eine vollständige Theorie zu haben, über eine geeignete Beschreibung der Materie verfügen. Eine gekrümmte Raumzeit kann nur mit den Mitteln der Differentialgeometrie beschrieben werden. In Wirklichkeit sind die Einsteingleichungen eine Beziehung zwischen geometrischen Objekten im Sinne der Differentialgeometrie. Um mit diesen Objekten etwas konkretes zu machen, müssen wir oft Koordinaten einführen, und mit den Komponenten der geometrischen Objekte in diesen Koordinaten arbeiten. Nur so bekommen wir aus den Einsteingleichungen ein System von partiellen Differentialgleichungen im üblichen Sinne. Eine schöne mathematische Eigenschaft der Einsteingleichungen ist, dass sie unabhängig von der Wahl der Koordinaten sind. Wenn wir aber zwecks Lösung eines bestimmten Problems Koordinaten wählen müssen, führt diese schöne abstrakte Eigenschaft oft zu Kopfschmerzen. Da wir im Prinzip jedes Koordinatensystem wählen dürfen haben wir die Qual der Wahl. Auf Beispiele werden wir im folgenden häufig treffen.

Eine gute Quelle von Informationen über die AR, die mathematische Aspekte berücksichtigt, ist [12]. Der relevante Hintergrund aus der Differentialgeometrie findet man z. B. in [13].

Im ersten Teil dieser Vorlesung werden verschiedene Begriffe eingeführt, die in der AR notwendig sind. Dabei geht es auch darum, Notationen und Terminologie festzulegen. Eine zentrale Rolle spielt die Geometrie der Lorentzmetriken, da diese die Rolle der unbekannten in den Einsteingleichungen spielen. Natürlich werden auch die Einsteingleichungen eingeführt. Anschliessend werden einige einfache Lösungen der Einsteingleichungen beschrieben. Es sind Vakuumlösungen, das heisst Lösungen ohne Materie. Um weiter zu kommen, müssen wir auf die Beschreibung der Materie innerhalb der AR eingehen. Danach können einfache Lösungen der Einsteingleichungen mit Materie eingeführt werden. Diese Lösungen spielen eine grosse Rolle in der Kosmologie, wo Modelle des Universums auf den grössten Skalen aufgestellt werden.

2 Grundlagen

2.1 Lorentzalgebra

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n+1$ mit $n \geq 1$ und g eine symmetrische Bilinearform auf V. Die durch g definierte quadratische Form bestimmt g eindeutig. Durch die Wahl einer geeigneten Basis e_i können wir erreichen, dass $g(e_i, e_j) = \epsilon_{ij}$ ist, wo $\epsilon_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und, für jeden Wert von i, ϵ_{ii} gleich 1, 0 oder -1 ist. Die Angabe der ϵ_{ii} heisst Signatur von g. Wenn $\epsilon_{ij} \neq 0$ für $i = j$ heisst g nicht entartet. In diesem Fall ist $|\epsilon_{ii}| = 1$ für alle i. Der bekannteste Fall in der Mathematik ist der, wo alle ϵ_{ii} gleich $+1$ sind, so dass g positiv definit ist. Für manche Anwendungen und, insbesondere für die, die im Folgenden eine Rolle spielen ist es unwichtig, wenn man g durch $-g$ ersetzt. In diesem Zusammenhang gibt es keinen wesentlichen Unterschied zwischen positiv und negativ definit. Wichtig ist die Anzahl der ϵ_{ii} mit dem weniger häufigen Vorzeichen. Der Fall der für die AR wichtig ist ist der, wo diese Anzahl gleich eins ist. Diese Signatur heisst Lorentzsignatur. In diesem Fall ist die Folge der Vorzeichen der ϵ_{ii} nach einer Permutation entweder $(-, +, \ldots, +)$ oder $(-, \ldots, -, +)$. Beide Möglichkeiten sind in der Literatur der AR weit verbreitet. Wir wählen hier immer die Signatur $(-, +, \ldots, +)$.

Wenn eine quadratische Form g gegeben ist, können wir die linearen Transformationen A von V betrachten, die g invariant lassen, d.h. $g(Ax, Ax) = g(x, x)$ für alle Vektoren $x \in V$. Diese Transformationen bilden eine Gruppe G. Wenn g positiv (oder negativ) definit ist, ist G die orthogonale Gruppe $O(n+1)$. Wenn g Lorentzsignatur hat ist die Gruppe die Lorentzgruppe $O(n, 1)$. Die Elemente dieser Gruppe heissen Lorentztransformationen.

Wenn eine quadratische Form g positiv definit ist, ist $g(v, v) > 0$ für jeden von Null verschiedenen Vektor v. Wenn g Lorentzsignatur hat, kann $g(v, v)$ positiv, negativ oder Null sein. Ein Vektor v mit $g(v, v) > 0$ heisst raumartig, ein Vektor mit $g(v, v) < 0$ zeitartig und ein Vektor $v \neq 0$ mit $g(v, v) = 0$ lichtartig. Die Vektoren mit $g(v, v) = 0$ (d.h. die lichtartigen zusammen mit dem Nullvektor) bilden einen Doppelkegel, Lichtkegel genannt. Die raumartigen Vektoren sind ausserhalb des Lichtkegels und die zeitartigen innerhalb. Die Menge der zeitartigen Vektoren hat zwei Zusammenhangskomponenten. Oft wird eine Komponente ausgezeichnet und als Zukunft bezeichnet. Dann können wir zwischen zukunftsgerichteten und vergangenheitsgerichteten zeitartigen Vektoren unterscheiden. Die lichtartigen Vektoren zerfallen auch in zwei Komponenten und können als zukunfts- oder vergangenheitsgerichtet bezeichnet werden. Für $n = 1$ hat die Menge der raumartigen Vektoren auch zwei Komponenten aber in höheren Dimensionen ist sie zusammenhängend und es gibt einen wesentlichen geometrischen Unterschied zwischen zeitartigen und raumartigen Vektoren. Vektoren, die zeitartig oder lichtartig sind heissen kausal. Der Charakter eines Vektorfeldes als raumartig, lichtartig oder zeitartig heisst kausalen Charakter. Eine Basis von V, die g in die kanonische Form bringt, heisst orthonormale Basis. Sie besteht aus einer zeitartigen und n raumartigen Vektoren. Die Mengen der zeitartigen bzw. raumartigen bzw. lichtartigen Vektoren sind invariant unter Lorentztransformationen.

Seien v und w Vektoren aus V mit Komponenten (v^0, v^i) und (w^0, w^i) in einer orthonormalen Basis. Dann ist $g(v, w) = -v^0 w^0 + \delta_{ij} v^i w^j$. Hier benutzen wir die Einsteinkonvention, dass bei einem wiederholten Index summiert wird. Diese Konvention wird von diesem Punkt an immer benutzt, es sei denn das Gegenteil wird ausdrücklich gesagt. Nehmen wir an, dass v und

w kausal und zukunftsgerichtet sind. Dann gilt $v^0 \geq (\delta_{ij}v^iv^j)^{1/2} \geq 0$ und $w^0 \geq (\delta_{ij}w^iw^j)^{1/2} \geq 0$. Es folgt, dass

$$g(v,w) = -v^0w^0 + \delta_{ij}v^iw^j \leq -v^0w^0 + (\delta_{ij}v^iv^j)^{1/2}(\delta_{kl}w^kw^l)^{1/2} \leq 0 \tag{1}$$

Das innere Produkt von zwei zukunftsgerichteten kausalen Vektoren ist immer nichtpositiv. Es ist nur dann Null wenn v und w lichtartig und parallel sind.

Sei W ein Teilraum von V und g eine nicht entartete quadratische Form. Das orthogonale Komplement von W bezüglich g besteht aus den Vektoren v mit $g(v,w) = 0$ für alle $w \in W$. Weil g nicht entartet ist, ist die Dimension des orthogonalen Komplements von W gleich $\mathrm{dim}V - \mathrm{dim}W$. Auf dem Teilraum W gibt es eine induzierte quadratische Form g_W, definiert durch $g_W(v_1,v_2) = g(v_1,v_2)$ für v_1, v_2 aus W. Wenn die induzierte quadratische Form auf W nicht entartet ist, dann ist die induzierte quadratische Form auf dem orthogonalen Komplement auch nicht entartet. Der Raum V ist die direkte Summe aus W und dem orthogonalen Komplement von W. Die Signatur der induzierten quadratischen Form auf dem orthogonalen Komplement von W wird durch die Signatur von g_W bestimmt. Ein wichtiger Fall ist der, wo W durch einen Vektor w erzeugt wird. Dann wird die Signatur des orthogonalen Komplements von W durch den kausalen Charakter von w bestimmt.

Lemma Sei g eine quadratische Form auf V mit Lorentzsignatur, $w \in V$ von Null verschieden und W das orthogonale Komplement von w. Wenn w zeitartig ist, ist g_W positiv definit und W heisst raumartig. Wenn w raumartig ist, hat g_W Lorentzsignatur und W heisst zeitartig. Wenn w lichtartig ist, ist g_W entartet und W heisst lichtartig. Die Signatur von g_W ist $(0,+,\ldots,+)$. In diesem Fall ist $w \in W$.

Beweis Die Aussagen für w zeitartig oder raumartig sind sehr leicht zu beweisen. In dem Fall ist der Raum die direkte Summe aus dem durch w aufgespannten Teilraum und dem orthogonalen Komplement W. Es reicht dann aus, eine Basis von W zu wählen, die g_W in die kanonische Form bringt. Es bleibt der Fall, wo w lichtartig ist. Da $w \in W$ ist g_W entartet. Es gibt auch keine zeitartigen Vektoren in W. Wir dürfen annehmen, dass w zukunftsgerichtet ist. Sei w' ein zeitartiger zukunftsgerichteter Vektor. Sei Z die Menge aller Vektoren, die senkrecht auf w und w' stehen. Dann ist Z ein Teilraum der Dimension $n-1$ und $Z \subset W$. Alle Vektoren in Z stehen senkrecht auf den zeitartigen Vektor w' und sind infolgedessen raumartig. Die Aussage über die Signatur folgt.

Wegen dem physikalischen Hintergrund ist der Fall $n = 3$ von besonderem Interesse. Deshalb werden wir uns oft, aber nicht immer, auf diesen Fall beschränken. Der Charakter von ein- und dreidimensionalen Teilräumen eines vierdimensionalen Vektorraums mit einer quadratischen Form mit Lorentzsignatur ist schon diskutiert worden. Im Fall $n = 3$ bleibt nur noch ein Fall, der Fall von zweidimensionalen Teilräumen. Diese heissen raumartig, lichtartig oder zeitartig wenn die induzierte Metrik positiv definit, entartet oder von Lorentzsignatur ist. Es sind die einzigen Möglichkeiten. Das orthogonale Komplement eines zweidimensionalen Teilraums, der zeitartig bzw. lichtartig bzw. raumartig ist ist raumartig bzw. lichtartig bzw. zeitartig.

2.2 Lorentzgeometrie

Grundbegriffe der Differentialgeometrie wie Mannigfaltigkeit, Koordinatensystem, Vektorfeld und Diffeomorphismus werden hier vorausgesetzt. Alle Vektoren in allen Punkten einer glatten Mannigfaltigkeit M der Dimension n bilden eine Mannigfaltigkeit TM der Dimension $2n$, das Tangentenbündel von M. Im folgenden bedeutet glatt C^∞. Die Abbildung $\pi : TM \to M$, die einen Tangentenvector in einem Punkt p auf p abbildet heisst Projektion und ein Vektorfeld ist eine Abbildung V von M in TM mit der Eigenschaft, dass $\pi \circ V$ die Identität ist. Alle Vektoren im Punkt p bilden einen Vektorraum T_pM, den Tangentenraum in p und $T_pM = \pi^{-1}(\{p\})$. Der Dualraum (im Sinne der linearen Algebra) von T_pM ist der Kotangentenraum T_p^*M. Ein Element von T_p^*M heisst 1-Form im Punkt p.

Eine pseudoriemannsche Metrik g auf M ist die Wahl einer nicht-entarteten quadratischen Form g_p auf T_pM für alle $p \in M$, die in einem geeigneten Sinne glatt von p abhängt. Eine Möglichkeit, diese Glattheit zu definieren ist zu verlangen, dass für alle glatten Vektorfelder V und W die skalaren Funktionen $g_p(V_p, W_p)$ glatt sind. Wenn die Mannigfaltigkeit M zusammenhängend ist, ist die Signatur einer pseudoriemannschen Metrik unabhängig von dem Punkt $p \in M$. Wenn diese Signatur $(+, +, \dots, +)$ ist, reden wir von einer riemannschen Metrik. Wenn die Signatur $(-, +, \dots, +)$ ist, haben wir eine Lorentzmetrik. Das Paar (M, g) wird als Lorentzmannigfaltigkeit bezeichnet. Dies ist das fundamentale mathematische Objekt in der AR.

Sei x^α ein Koordinatensystem auf der Lorentzmannigfaltigkeit (M, g). Auf dem Definitionsbereich des Koordinatensystems sind Vektorfelder $\partial/\partial x^\alpha$ definiert. Sie bilden in jedem Punkt p eine Basis von T_pM. Die Komponenten V^α eines Vektorfeldes V im gegebenen Koordinatensystem werden durch die Beziehung $V = V^\alpha \partial/\partial x^\alpha$ definiert. Die Komponenten der Lorentzmetrik g werden durch $g_{\alpha\beta} = g(\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta)$ definiert. Die Glattheit der Metrik g ist damit äquivalent, dass die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ von g in jedem Koordinatensystem glatt sind. Das Koordinatensystem definiert auch 1-Formen dx^α. Diese sind zu den oben definierten Basisvektorfeldern dual in dem Sinne, dass $dx^\alpha(\partial/\partial x^\beta) = \delta^\alpha_\beta$, wo δ^α_β das Kronecker-δ ist.

Es ist wichtig, dass bestimmte Indizes (z. B. V^α) oben geschrieben werden und andere (z. B. $g_{\alpha\beta}$) unten. Die Einsteinkonvention wird meist nur bei den wiederholten Indizes angewendet, die einmal oben und einmal unten stehen. Z.B., im Ausdruck $g_{\alpha\beta}V^\alpha W^\beta$ wird über α und β summiert und das Ergebnis ist nichts anderes als $g(V, W)$. Die Matrix $g_{\alpha\beta}$ ist invertierbar, da g nicht entartet ist. Die Inverse dieser Matrix wird mit $g^{\alpha\beta}$ bezeichnet. Sie definiert die so genannte inverse Metrik. Diese ist eine glatte Familie von quadratischen Formen auf den Kotangenetenräumen T_p^*M. Wenn man diese quadratischen Formen auf den Basisvektoren dx^α auswertet bekommt man die Komponenten $g^{\alpha\beta}$. Es gilt die Beziehung $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$. In der AR benutzt man eine Schreibweise (z. B. $g_{\alpha\beta}$) für ein mathematisches Objekt und für die Komponenten dieses Objekts in einem Koordinatensystem. Diese Vorgehensweise mag auf den ersten Blick etwas verwirrend erscheinen. Man gewöhnt sich aber schnell daran. Wenn man die Schreibweise im ersten Sinne meint, redet man oft von abstrakten Indizes. Wichtig ist zu merken, dass $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ mit der Interpretation von abstrakten Indizes zwei verschiedene mathematische Objekte sind, obwohl der Kern g in der Notation gleich ist.

Jetzt kommen wir zur Frage der Stellung der Indizes zurück. Sei V^α ein Vektorfeld. Man definiert $V_\alpha = g_{\alpha\beta}V^\beta$. V_α ist die kontravariante Form von V^α. Es folgt, dass $V^\alpha = g^{\alpha\beta}V_\beta$. Diese Konstruktionen können für jede pseudoriemannsche Metrik definiert werden. Notwendig ist nur die Tatsache, dass g nicht entartet ist. Ähnliche Konventionen gelten für Tensoren. Ein Tensor T ist eine glatte Familie von Objekten T_p, wo T_p eine multilineare Abbildung ist $(T_p^*M)^k \times (T_pM)^l \to \mathbf{R}$. Die Komponenten des Tensors T werden als $T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}$ bezeichnet und werden erhalten indem wir T auf k Kovektoren $dx^\alpha,\ldots,dx^\beta$ und l Vektoren $\partial/\partial x^\gamma,\ldots,\partial/\partial x^\delta$ auswerten. Diese Schreibweise kann auch im Sinne von abstrakten Indizes interpretiert werden. Mit der Metrik kann man Indizes von beliebigen Tensoren bewegen. Z. B., betrachten wir einen $(1,2)$-Tensor $T^\alpha{}_{\beta\gamma}$. Der dazu assoziierte $(0,3)$-Tensor wird durch $T_{\sigma\beta\gamma} = g_{\sigma\alpha}T^\alpha{}_{\beta\gamma}$ definiert.

Da die hier gegebene Definition von assoziierten Tensoren anscheinend Koordinaten wesentlich verwendet könnte man zweifeln, ob diese Tensoren unabhängig von Koordinaten wohldefiniert sind. Dies ist der Fall, obwohl wir es hier nicht beweisen. Eine andere Frage ist, warum wir die abstrakten Indizes überhaupt verwenden wollen. Der Grund ist, dass in der AR sehr aufwendige Rechnungen mit Tensoren benötigt werden und dass die abstrakten Indizes den Aufwand solcher Rechnungen minimieren. Immer indexfrei zu rechnen ist in gewissem Sinne angenehm. Es ist aber ein Luxus, den man sich in komplizierten Problemen nicht leisten kann.

Eine Kurve γ in der Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung von einem Intervall $I \subset \mathbf{R}$ in M. Wenn die Abbildung stetig differenzierbar ist, gibt es zu jedem Parameterwert $\lambda \in I$ einen Tangentenvektor $\dot\gamma(\lambda)$ im Punkt $\gamma(\lambda)$. Wenn dieser Vektor immer zeitartig ist, heisst die Kurve zeitartig. Auf ähnliche Art und Weise definiert man lichtartige, kausale und raumartige Kurven. Eine Hyperfläche S in M heisst raumartig bzw. lichtartig bzw. zeitartig wenn der Tangentenraum zu S in jedem Punkt diesen Charakter besitzt. Insbesondere ist eine Hyperfläche raumartig wenn und nur wenn die induzierte Metrik positiv definit ist.

Die Grundgleichungen der AR sind die Einsteingleichungen. Es sind Gleichungen, wo eine Lorentzmetrik, die Raumzeitmetrik, als unbekannte eingeht. Bevor wir aber diese Gleichungen aufschreiben können, brauchen wir den wichtigen Begriff der Krümmung. Diesem Thema widmen wir uns im nächsten Abschnitt. Schon jetzt können wir aber die einfachste Lösung der Einsteingleichungen angeben. Es handelt sich um die Minkowskimetrik $\eta_{\alpha\beta}$. Diese Metrik ist auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{R}^4$ definiert und die Komponentenmatrix in kartesischen Koordinaten ist diagonal mit Einträgen $(-1,1,1,1)$. In einer anderen Schreibweise ist die Minkowskimetrik $-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$. Man kann natürlich durch eine analoge Definition eine Minkowskimetrik in jeder Dimension einführen.

2.3 Zusammenhang und Krümmung

Sei f eine reellwertige Funktion auf M. Die äussere Ableitung df von f is eine 1-Form und hat Komponenten $\partial_\alpha f$. Im Gegensatz dazu bilden die partiellen Ableitungen $\partial_\alpha V^\beta$ der Komponenten V^β eines Vektorfeldes keinen Tensor. Mit Hilfe einer pseudoriemannschen Metrik können wir eine Ableitung einführen, die Tensoren in Tensoren überführt. Es handelt sich um die so gennante kovariante Ableitung. Wenn eine Metrik $g_{\alpha\beta}$ gegeben ist, werden die Christoffelsymbole durch

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \tag{2}$$

definiert. Die kovariante Ableitung des Vektorfeldes V^α ist

$$\nabla_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} V^\gamma \tag{3}$$

und ist ein Tensor. Diese Formel kann man auf allgemeine Tensoren ausweiten:

$$\nabla_\alpha T^{\beta\ldots\gamma}{}_{\delta\ldots\epsilon} = \partial_\alpha T^{\beta\ldots\gamma}{}_{\delta\ldots\epsilon} + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma} T^{\sigma\ldots\gamma}{}_{\delta\ldots\epsilon} + \ldots - \Gamma^\sigma_{\alpha\delta} T^{\beta\ldots\gamma}{}_{\sigma\ldots\epsilon} - \ldots \tag{4}$$

Auf der rechten Seite soll über alle Indizes summiert werden. Im Fall einer skalaren Funktion f setzen wir $\nabla_\alpha f = \partial_\alpha f$. Die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet und dies ist eine der wichtigsten Eigenschaften dieser Operation.

Auf skalaren Funktionen kommutieren die kovarianten Ableitungen, d.h. $\nabla_\alpha \nabla_\beta f = \nabla_\beta \nabla_\alpha f$. Bei Vektoren gilt dies nicht mehr. Statt dessen gilt

$$\nabla_\gamma \nabla_\delta V^\alpha - \nabla_\delta \nabla_\gamma V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} V^\beta \tag{5}$$

Hier ist $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ ein Tensor, der Riemannsche Krümmungstensor oder Riemanntensor. Die Komponenten des Riemanntensors können durch die der Christoffelsymbole ausgedrückt werden:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \tag{6}$$

Durch Spurbildung bekommen wir den Riccitensor $R_{\alpha\beta} = R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$. Mit Hilfe der Metrik können wir eine weitere Spur bilden und erhalten die Skalarkrümmung $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. In der Literatur der AR und in der riemannschen Geometrie gibt es verschiedene Konventionen bei der Definition dieser Krümmungsgrössen. Dabei spielt die Reihenfolge der Indizes eine wesentliche Rolle. Mit dieser Reihenfolge ändern sich Teilweise die Vorzeichen. Dies folgt aus den Symmetrie-Eigenschaften des Krümmungstensors. Der Riemanntensor mit allen Indizes unten ist symmetrisch unter Vertauschung der beiden Indexpaare

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{7}$$

und schiefsymmetrisch unter Vertauschung der Indizes innerhalb dieser Indexpaare

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \tag{8}$$

Zusätzlich gilt die algebraische, oder erste, Bianchi-Identität

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{9}$$

Als einfache Folge dieser Symmetrieeigenschaften ist der Riccitensor symmetrisch, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. Es gibt eine wichtige Symmetrie-Eigenschaft, die die kovarianten Ableitungen des Riemanntensors betrifft. Es handelt sich um die zweite Bianchi-Identitität

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\epsilon} + \nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\epsilon\gamma} = 0 \tag{10}$$

Durch Spurbildung bekommen wir die Identität

$$\nabla^\gamma (R_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} R g_{\beta\gamma}) = 0 \tag{11}$$

Wenn wir $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ definieren, dann ist $G_{\alpha\beta}$ auf Grund dieser Identität divergenzfrei. $G_{\alpha\beta}$ ist der Einsteintensor und spielt bei der Formulierung der Einsteingleichungen eine Schlüsselrolle. Da $G_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist, hat dieser Tensor zehn algebraisch unabhängige Komponenten.

2.4 Geodäten

Sei $\gamma(\lambda)$ eine glatte Kurve in einer Raumzeit. Wenn t^α den Tangentenvektor zu γ bezeichnet kann man den Ausdruck $t^\alpha \nabla_\alpha t^\beta$ betrachten. Damit der Audruck wohldefiniert ist braucht man im Prinzip ein Vektorfeld t^α auf einer offenen Umgebung von γ. Man kann aber folgendermassen vorgehen. Man wählt eine glatte Fortsetzung des Vektorfeldes auf γ auf eine Umgebung und stellt fest, dass die Einschränkung von $t^\alpha \nabla_\alpha t^\beta$ auf γ nicht von der Fortsetzung abhängt. Eine andere Fortsetzung wäre von der Form $t^\alpha + f x^\alpha$, wo f auf γ verschwindet. Das erwünschte Ergebnis folgt durch eine einfache Rechnung.

Die Kurve γ heisst Geodäte wenn der Tangentenvektor t^α so ist, dass $t^\alpha \nabla_\alpha t^\beta = f t^\beta$ für eine Funktion f. In diesem Fall können wir einen neuen Parameter auf γ wählen, so dass der neue Tangentenvektor $t^\alpha \nabla_\alpha t^\beta = 0$ erfüllt. Ein solcher Parameter heisst affin und ist eindeutig bis auf eine affine Transformation. Durch Integration von dem Ausdruck $(g_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta)^{1/2}$ bezüglich des Parameters längs einer raumartigen Kurve bekommt man die Bogenlänge. Bei einer zeitartigen Kurve kann man etwas ähnliches machen, In diesem Fall integriert man $(-g_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta)^{1/2}$. Das Ergebnis nennt man Bogenlänge aber auch Eigenzeit. Der Ursprung dieser Terminologie in der Physik ist wie folgt. Ein Beobachter in der Raumzeit hat eine Weltlinie, eine zeitartige Kurve, die durch seinen Ort zu verschiedenen Zeiten gegeben wird. Wenn er eine genaue Uhr mitführt ist die dadurch angezeigte Zeit die Eigenzeit längs seiner Weltlinie. Die Eigenzeit ist ein ausgezeichneter affiner Parameter längs zeitartiger Geodäten. Im Falle einer lichtartigen Kurve ist die Bogenlänge Null und kann deshalb nicht als Parameter benutzt werden. Die Weltlinie eines Teilchens der Ruhmasse Null, (z. B. ein Photon) ist eine lichtartige Kurve. Die Weltlinie eines Teilchens mit positiver Ruhmasse ist zeitartig. Wenn man sich vorstellt, dass kausale Einflüsse nur durch Teilchen erfolgen können, dann können diese Einflüsse sich nur längs zeitartiger oder lichtartiger Kurven ausbreiten. Die Bezeichnung dieser Kurven als kausal rührt daher. Die Weltlinie eines freien Teilchens, d.h. eines Teilchens, dass keine Kräfte ausser der Gravitation verspürt ist eine Geodäte.

Eine Geodäte heisst vollständig wenn ein affiner Parameter für alle reelle Werte definiert ist. Da es physikalisch bedenklich ist, wenn ein Teilchen nach endlicher Zeit aufhört zu existieren, sind vollständige Geodäten besonders wichtig. Eine Raumzeit, wo alle Geodäten vollständig sind, heisst geodätisch vollständig. Eine Raumzeit, die nicht geodätisch vollständig ist, heisst singulär. In diesem Fall sagt man auch, dass eine Singularität vorhanden ist, aber ohne ein mathematisches Objekt zu identifizieren, die als Singularität bezeichnet werden könnte.

2.5 Die Einsteingleichungen

In der AR betrachtet man eine Lorentzmetrik, die die Einsteingleichungen erfüllt. Die Metrik beschreibt die Geometrie von Raum und Zeit und auch das Gravitationsfeld. Die Einsteingleichungen lauten:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi(G/c^4)T_{\alpha\beta} \tag{12}$$

Dabei ist $G_{\alpha\beta}$ der Einsteintensor einer Lorentzmetrik $g_{\alpha\beta}$ und $T_{\alpha\beta}$ der Energieimpulstensor. Der Tensor $T_{\alpha\beta}$ beschreibt die Energie, den Impuls und die Spannumgen der Materie, die in der Raumzeit vorhanden ist. Er hängt von gewissen Materiefeldern und auch von der Metrik ab. Einzelheiten der Beschreibung der Materie werden später behandelt. In Gleichung (12) bezeichnet G ohne Indizes die newtonsche Gravitationkonstante und c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die numerischen Werte von G und c hängen von der Wahl der Einheiten ab, die zur Beschreibung des physikalischen Systems benutzt werden. Im Folgenden wählen wir ein System von Einheiten, wo die numerischen Werte von G und c eins sind. Dies ist eine häufige Wahl in der Literatur der AR. In diesem Fall vereinfacht sich (12) auf

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{13}$$

Die Zahl 8π ist in vier Dimensionen natürlich. In anderen Dimensionen ist es nicht so klar.

Die Gleichung (13) hat nur dann einen Inhalt, nachdem man die Form von $T_{\alpha\beta}$ festgelegt hat. Ein paar Beispiele werden verdeutlichen, was gemeint ist. Betrachten wir zuerst den Fall, wo wir einen Raumzeitbereich haben, in dem keine Materie vorhanden ist. In dem Fall verschwindet der Energieimpulstensor und die Einsteingleichungen lauten $G_{\alpha\beta} = 0$. Diese Bedingung ist äquivalent (in jeder Dimension $n > 1$) mit der Bedingung $R_{\alpha\beta} = 0$. Ein zweites Beispiel ist das Skalarfeld. Eigentlich, um dieses Modell von anderen zu unterscheiden müssten wir sagen 'das lineare, masselose, minimal gekoppelte Skalarfeld' aber diese Mühe werden wir uns im Moment sparen. Dieses Materiefeld hat keine einfache, konkrete physikalische Bedeutung. Es wird aber oft für theoretische Zwecke eingesetzt, sowohl von Physikern als auch von Mathematikern. Es gehört zu den einfachsten Materiemodellen überhaupt. Das Skalarfeld ist eine reellwertige Funktion ϕ und der Energieimpulstensor lautet in diesem Fall

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \frac{1}{2}(\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi)g_{\alpha\beta} \tag{14}$$

Wenn wir ein Materiefeld betrachten, das mit dem Gravitationsfeld wechselwirkt, müssen wir nicht nur die Einsteingleichungen betrachten, sondern auch die Bewegungsgleichungen der Materie. Die Bewegungsgleichung des Skalarfeldes ist $\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi = 0$, wo die kovariante Ableitung durch die Metrik $g_{\alpha\beta}$ bestimmt wird. Diese Bewegungsgleichung ist die Wellengleichung im gekrümmten Raum, dessen Geometrie durch $g_{\alpha\beta}$ definiert ist. In dem Fall, dass $g_{\alpha\beta}$ die Minkowskimetrik $\eta_{\alpha\beta}$ ist, erhalten wir die wohlbekannte Wellengleichung $-\partial_t^2\phi + \delta^{ij}\partial_i\partial_j\phi = 0$. Die Bewegungsgleichung des Skalarfeldes folgt aus den Einsteingleichungen wegen der Bianchi-Identitäten. Es soll betont werden, dass dies nicht typisch ist. Es ist vielmehr ein Artefakt, bedingt durch die extreme Einfachheit des Materiemodells. Im allgemeinen zieht die Divergenzfreiheit des Einsteintensors die Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors mit sich. Die Bewegungsgleichungen der Materie implizieren auch die Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors, aber nicht umgekehrt.

Betrachten wir die Einsteinschen Vakuumgleichungen. In lokalen Koordinaten handelt es sich offenbar um ein System von zehn partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Von welcher Art sind diese Gleichungen? Sie gehören leider nicht zu den Gleichungen die man in den elementaren Lehrbüchern findet. Ihre Beziehung zu den hyperbolischen Gleichungen ist eng, aber leider auch schwierig. Um mehr über die Natur dieser Gleichungen zu erfahren ist es naheliegend, den Hauptteil zu betrachten. Eine kurze Rechnung ergibt

$$g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma\partial_\delta g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\beta\partial_\delta g_{\alpha\gamma}) + \ldots = 0 \tag{15}$$

Die Terme niederer Ordnung, die in dieser Formel weggelassen wurden sind alle bilinear in den Komponenten $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}$ und in den Komponenten $g^{\alpha\beta}$. Der erste Term in der Gleichung (15) sieht aus wie der Hauptteil der Wellengleichung in der Geometrie $g_{\alpha\beta}$. Hier sehen wir den hyperbolischen Einfluss. Es ist aber unklar, was man mit den anderen Termen machen soll.

2.6 Gruppenoperationen

Eine Liegruppe ist eine Gruppe G die Gleichzeitig eine Mannigfaltigkeit ist, wo die Multiplikation eine glatte Abbildung $G \times G \to G$ ist und die Inverse eine glatte Abbildung $G \to G$ definiert. Eine Operation der Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Abbildung $\phi : G \times M \to M$ mit der Eigenschaft, dass $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ für alle g und h aus G und alle $x \in M$. Ein einfaches Beispiel ist wo G die Gruppe $SO(3)$ der Rotationen im $\mathbf{R}^3$ ist, $M = \mathbf{R}^3$ und $\phi(A, x) = Ax$.

2.7 Überlagerungen

Seien M und N zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension. Eine glatte Abbildung ϕ von M auf N heisst Überlagerung wenn jeder Punkt $x \in N$ eine offene Umgebung U hat mit der Eigenschaft, dass $\phi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von Teilmengen U_α ist, so dass die Einschränkung von ϕ auf U_α ein Diffeomorphismus von U_α auf U ist. Jede Mannigfaltigkeit hat eine Universelle Überlagerung, die keine weitere nichttriviale Überlagerung zulässt. Zum Beispiel ist die Abbildung $\theta \mapsto e^{i\theta}$ eine Überlagerung von $\mathbf{R}$ auf den Einheitskreis in der komplexen Ebene. Es handelt sich um die universelle Überlagerung von S^1.

3 Explizite Vakuumlösungen

3.1 Der Minkowskiraum

Der Minkowskiraum hat die Eigenschaft, dass der Krümmungtensor verschwindet und ist also flach. Es folgt, dass diese Metrik (diese Raumzeit) die Einsteinschen Vakuumgleichungen erfüllt. Wenn $\gamma(s)$ eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve ist mit Bogenlänge s, dann ist $dt/ds \geq 1$. Für eine affin parametrisierte lichtartige Geodäte bekommt man auch eine konstante untere Schranke für die Ableitung von t bezüglich des Parameters. Es folgt, dass jede kausale Kurve, die nicht weiter fortgesetzt werden kann, die raumartige Hyperfläche $t = 0$ genau einmal trifft. Eine raumartige Hyperfläche in einer Raumzeit, die diese Eigenschaft besitzt, heisst Cauchyhyperfläche. Eine Raumzeit, die eine Cauchyhyperfläche enthält heisst global hyperbolisch. Die Eigenschaft der globalen Hyperbolizität hat damit zu tun, dass eine solche Raumzeit durch Anfangsdaten auf einer raumartigen Hyperfläche bestimmt werden kann. Es handelt sich hier um das Anfangswertproblem für die Einsteingleichungen, ein etwas kompliziertes Thema. Dass es natürlich ist, ein solches Anfangswertproblem zu betrachten wird durch die Beobachtung nahegelegt, dass die Einsteingleichungen Ähnlichkeiten mit hyperbolischen Gleichungen aufweisen. Jedenfalls können wir festhalten, dass der Minkowskiraum global hyperbolisch ist.

Betrachten wir das Hyperboloid H mit der Gleichung $t^2 = 1+\delta_{ij}x^i x^j$, $t > 0$. Es ist leicht zu sehen, dass H für den Minkowskiraum keine Cauchyhyperfläche ist. Der Bereich des Minkowskiraumes mit $t > \sqrt{\delta_{ij}x^i x^j}$ ist eine Raumzeit in sich. Diese neue Raumzeit ist global hyperbolisch und hat H als Cauchyhyperfläche. Die Hyperflächen mit den Gleichungen $t^2 = c^2 + \delta_{ij}x^i x^j$ und $c > 0$ sind raumartig und bilden eine Blätterung der Raumzeit. Die Raumzeit mit dieser Blätterung ist eine Art kosmologisches Modell und heisst manchmal Milnemodell. Man kann die Blätterung so interpretieren, dass die Tangentenräume dazu die Ruhräume der Galaxien im Kosmos darstellen. Eine andere Raumzeit erhalten wir, wenn wir aus dem Minkowskiraum den Ursprung herausschneiden. Die so definierte Raumzeit ist nicht global hyperbolisch. Durch triviale Prozeduren dieser Art kann man Raumzeiten mit pathologischen Eigenschaften erzeugen. Sie werden hier nur erwähnt um zu betonen dass man, um auf physikalisch vernünftige Raumzeiten zu kommen, gewisse Abgründe ausschliessen muss. Das Anfangswertproblem ist ein gutes Mittel zu diesem Zweck.

Jedes Element der Lorentzgruppe definiert eine glatte Transformation des Minkowskiraums. Es handelt sich um eine Isometrie. Ein Diffeomorphismus ϕ einer Lorentzmannigfaltigkeit kann benutzt werden, um Tensoren zu transportieren. Wenn V ein Vektor im Punkt p ist, dann definiert ϕ einen Vektor $\phi_* V$ im Punkt $q = \phi(p)$. In lokalen Koordinaten haben wir

$$(\phi_* V)^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta \tag{16}$$

Die Metrik g_q kann nach p transportiert werden.

$$(\phi^* g)_p(V, W) = g_q(\phi_* V, \phi_* W) \tag{17}$$

Wenn $\phi^* g = g$ heisst ϕ Isometrie von g. Die Translationen des Minkowskiraums sind auch Isometrien und erzeugen zusammen mit den Lorentztransformationen die Poincaré-Gruppe.

Betrachten wir jetzt Elemente der Lorentzgruppe, die zukunftsgerichetete Vektoren auf ebensolche abbilden. Sie bilden eine Untergruppe der Lorentzgruppe, die so genannte isochrone Lorentzgruppe. Die isochrone Lorentzgruppe bildet die Teilmenge des Minkowskiraums, die das Milnemodell darstellt in sich. Deshalb kann man alle Elemente der isochronen Lorentzgruppe als Isometrien des Milnemodells auffassen. Die ausgezeichnete Blätterung wird auch invariant gelassen.

Die Geodäten des Minkowskiraums sind die Geraden und die affinen Parameter sind affine Funktionen der kartesischen Koordinaten. Deshalb ist der Minkowskiraum geodätisch vollständig. Das Milnemodell ist nicht vollständig. Es ist, aber, in einem offensichtlichen Sinne vollständig in der Zukunft.

Jede der ausgezeichneten raumartigen Hyperflächen im Milnemodell hat eine induzierte riemannsche Metrik. Die so definierte Metrik ist in der riemannschen Geometrie bekannt und ist der hyperbolische Raum. Der Krümmungstensor des hyperbolischen Raumes ist sehr einfach und erfüllt

$$R_{abcd} = k(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \tag{18}$$

für eine Konstante k. Die isochrone Lorentzgruppe definiert eine Gruppe von Isometrien des hyperbolischen Raums. Es ist bekannt, dass es diskrete Untergruppen gibt mit der Eigenschaft, dass der entsprechende Quotient des hyperbolischen Raums eine kompakte Mannigfaltigkeit ist. Auf diese Weise kann man aus dem Milnemodell ein räumlich kompaktes kosmologisches Modell machen, d.h. eine Raumzeit mit einer kompakten Cauchyhyperfläche.

3.2 Der de Sitter-Raum

Es gibt eine Verallgemeinerung der Einsteingleichungen (13), deren Popularität in der Geschichte der AR geschwankt hat. Die Gleichungen sind

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{19}$$

wobei Λ eine Konstante ist, die kosmologische Konstante. Heutige astrophysikalische Beobachtungen sprechen dafür, dass in unserer Welt $\Lambda > 0$. In diesem Fall wird die Rolle des Minkowskiraums durch den de Sitter-Raum übernommen.

Der de Sitter-Raum kann als Hyperfläche im fünfdimensionalen Minkowskiraum dargestellt werden. Dieser höherdimensionale flache Raum ist in diesem Zusammenhang ein mathematisches Hilfsmittel und hat keine physikalische Bedeutung. Betrachten wir also den $\mathbf{R}^5$ mit kartesischen Koordinaten (v, w, x, y, z) und der Lorentzmetrik

$$-dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20}$$

Das Hyperboloid mit der Gleichung $-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ und $\alpha > 0$ ist eine zeitartige Hyperfläche mit Topologie $S^3 \times \mathbf{R}$. Die darauf induzierte Metrik hat Lorentzsignatur und definiert den de Sitter-Raum. Man kann Koordinaten auf dem Hyperboloid durch folgende Beziehungen definieren:

$$\alpha \sinh(\alpha^{-1}t) = v, \quad \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \cos\chi = w, \tag{21}$$
$$\alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin\chi \cos\theta = x, \quad \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin\chi \sin\theta \cos\phi = y, \tag{22}$$
$$\alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin\chi \sin\theta \sin\phi = z. \tag{23}$$

In diesen Koordinaten hat die Metrik die Form

$$-dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{24}$$

Hier ist $t \in \mathbf{R}$, $\chi \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$. Es sind keine global regulären Koordinaten, aber die Singularitäten sind harmlos, wie der Ursprung in der Ebene in Polarkoordinaten. Die Metrik sieht auch singulär aus. Im Beispiel der Ebene sieht die Metrik $dr^2 + r^2 d\theta^2$ singulär aus weil die Determinante der Matrix der metrischen Komponenten im Ursprung verschwindet. In dieser Situation reden wir von einer Koordinatensingularität der Metrik. Wir wissen dass die Singularität bei $\chi = 0$ in der Metrik (24) eine Koordinatensingularität ist, weil wir von einer regulären Geometrie ausgegangen sind. Wenn eine Metrik in Koordinaten präsentiert wird ist es nicht immer einfach zu entscheiden, ob eine angebliche Singularität tatsächlich eine Koordinatensingularität ist und ob die Metrik eventuell darüber hinaus fortgesetzt werden kann. Diese Metrik erfüllt die Einsteinschen Vakuumgleichungen mit $\alpha = \sqrt{3/\Lambda}$.

Man kann andere Koordinaten folgendermassen einführen:

$$\hat{t} = \alpha \log \frac{w+v}{\alpha}, \hat{x} = \frac{\alpha x}{w+v}, \hat{y} = \frac{\alpha y}{w+v}, \hat{z} = \frac{\alpha z}{w+v} \tag{25}$$

In diesen Koordinaten hat die Metrik die Form:

$$-d\hat{t}^2 + \exp(2\alpha^{-1}\hat{t})(d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2) \tag{26}$$

Diese Koordinaten überdecken nur die Hälfte des Hyperboloids mit $v + w > 0$. Das Problem der Koordinatensingularitäten kann auch das Unendliche in einem Koordinatensystem betreffen. Z. B. kann die de Sitter-Lösung jenseits von $\hat{t} = -\infty$ fortgesetzt werden.

Die einzigen von Null verschiedenen Christoffelsymbole sind in diesem Fall

$$\Gamma^0_{ab} = \alpha^{-1} \exp(2\alpha^{-1}\hat{t})\delta_{ab} \tag{27}$$
$$\Gamma^a_{0b} = \Gamma^a_{b0} = \alpha^{-1}\delta^a_b \tag{28}$$

Die Komponenten des Krümmungstensors sind

$$R_{abcd} = \frac{\Lambda}{3}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (29)$$

$$R_{0abc} = 0 \quad (30)$$

$$R_{0a0b} = -\frac{\Lambda}{3}g_{ab} \quad (31)$$

Diese Gleichungen können in der Form $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\Lambda}{3}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$ zusammengefasst werden. Es folgt, dass $R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$. Die Krümmungsinvariante $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ heisst Kretschmannskalar. Eine Methode um zu zeigen, dass eine Raumzeit nicht fortgesetzt werden kann ist zu zeigen, dass der Kretschmannskalar explodiert. Im Falle der de Sitter-Raumzeit, die durch $\hat{t} = -\infty$ fortgesetzt werden kann hat der Kretschmannskalar den Wert $\frac{24\Lambda^2}{9}$ und diese Invariante explodiert nicht.

Betrachten wir eine zukunftsgerichtete kausale Geodäte mit affinem Parameter τ. Die Gleichungen der Geodäten sind

$$\frac{d^2\hat{t}}{d\tau^2} + \alpha^{-1}e^{2\alpha^{-1}\hat{t}}\delta_{ab}\frac{d\hat{x}^a}{d\tau}\frac{d\hat{x}^b}{d\tau} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{d^2\hat{x}^a}{d\tau^2} + 2\alpha^{-1}\frac{d\hat{x}^a}{d\tau}\frac{d\hat{t}}{d\tau} = 0 \quad (33)$$

Aus der Gleichung für $\hat{x}^a$ folgt dass $\frac{d\hat{x}^a}{d\tau} = A^a e^{-2\alpha^{-1}\hat{t}}$ für Konstanten A^a. Wenn dieses Ergebnis in die Gleichung für $\hat{t}$ eingesetzt wird, ergibt sich die Beziehung

$$\frac{d^2\hat{t}}{d\tau^2} = -\alpha^{-1}e^{-2\alpha^{-1}\hat{t}}\delta_{ab}A^aA^b \quad (34)$$

Insbesondere folgt daraus, dass $d\hat{t}/d\tau$ nicht zunimmmt und $d\tau/d\hat{t}$ nicht abnimmt. Diese Beobachtung reicht, um die geodätische Vollständigkeit in der Zukunft zu beweisen. Sei $\epsilon = 0$ für eine lichtartige Geodäte und $\epsilon = 1$ für eine zeitartige Geodäte. Dann gilt

$$-\epsilon = -\left(\frac{d\hat{t}}{d\tau}\right)^2 + g_{ab}\frac{d\hat{x}^a}{d\tau}\frac{d\hat{x}^b}{d\tau} \quad (35)$$

Der letzte Term in diesem Ausdruck ist bis auf eine multiplikative Konstante gleich $\exp(-2\alpha^{-1}\hat{t})$. Im zeitartigen Fall gilt $d\tau/d\hat{t} = (1 + Ce^{-2\alpha^{-1}\hat{t}})^{-1/2}$ und es folgt dass asymptotisch, für grosse Werte von $\hat{t}$, die Zeitkoordinaten $\hat{t}$ und τ fast gleich sind. Im lichtartigen fall gilt $d\tau/d\hat{t} = Ce^{\alpha^{-1}\hat{t}}$ für eine positive Konstante C. Deshalb hängt der affine Parameter exponentiell von $\hat{t}$ ab.

3.3 Der anti-de Sitter-Raum

Es gibt ein Analogon des de Sitter-Raums für die Einsteinschen Vakuumgleichungen mit $\Lambda < 0$. Dieser anti-de Sitter-Raum wird im Folgenden eine geringe

Rolle spielen, aber aus Gründen der Vollständigkeit wollen wir hier eine kurze Beschreibung davon liefern. Um diesen Raum zu beschreiben betrachten wir eine Hyperfläche im $\mathbf{R}^5$ mit einer flachen pseudoriemmanschen Metrik der Signatur $(-,-,+,+,+)$. Die Metrik kann in der Form $-du^2-dv^2+dx^2+dy^2+dz^2$ geschrieben werden und die Hyperfläche wird durch die Gleichung $-u^2-v^2+x^2+y^2+z^2=1$ beschrieben. Die induzierte Metrik hat Lorentzsignatur. Die Hyperfläche hat die Topologie $S^1\times\mathbf{R}^3$. Diese Raumzeit hat geschlossene zeitartige Kurven, was eine Verletzung der Kausalität bedeutet. Deshalb betrachtet man normalerweise die universelle Überlagerung, die dieses Problem nicht hat. Die Überlagerung ist der anti-de Sitter-Raum. In geeigneten Koordinaten hat die Metrik die Form

$$-\cosh^2 r dt^2+dr^2+\sinh^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{36}$$

Diese Raumzeit ist nicht global hyperbolisch.

3.4 Die Kasnerlösung

Jetzt betrachten wir wieder die Einsteinschen Vakuumgleichungen mit $\Lambda=0$. Die vielleicht einfachste Lösung ausser dem Minkowskiraum ist die Kasnerlösung. Die Metrik ist

$$-dt^2+t^{2p_1}dx^2+t^{2p_2}dy^2+t^{2p_3}dz^2 \tag{37}$$

Hier $t\in(0,\infty)$ und x, y und z sind kartesiche Koordinaten im $\mathbf{R}^3$. Die Konstanten p_1, p_2 und p_3 erfüllen die Beziehungen

$$p_1+p_2+p_3=1,\quad p_1^2+p_2^2+p_3^2=1 \tag{38}$$

Diese heissen erste und zweite Kasnerbeziehungen. Eine alternative Interpretation bekommt man indem man die Koordinaten x, y und z periodisch identifiziert. Dann haben die Raumschnitte t=Konst. die Topologie T^3. Alle Lösungen haben eine dreidimensionale Symmetriegruppe, die durch die Translationen in x, y und z definiert wird. Wenn die räumliche Topologie $\mathbf{R}^3$ ist, ist die Symmetriegruppe $\mathbf{R}^3$. Wenn die räumliche Topologie T^3 ist, ist die Gruppe T^3 oder, in einer anderen Schreibweise $U(1)\times U(1)\times U(1)$.

Die Lösungsmenge der Kasnerbeziehungen ist ein Kreis im $\mathbf{R}^3$. Die Lösungen, wo p_1 seinen Extremalwert annimmt sind $(-1/3,2/3,2/3)$ und $(1,0,0)$. Wenn die räumliche Mannigfaltigkeit als $\mathbf{R}^3$ angenommen wird, haben diese Lösungen zusätzlich zu der durch Translationen definierten Symmetrie eine weitere Symmetrie, die durch Rotationen in der (y,z)-Ebene definiert ist. Für den Fall der Topologie T^3 können wir dies als lokale Symmetrie bezeichnen. In dem Fall existiert eine entsprechende globale Symmetrie nur auf der universellen Überlagerung. Die Lösungen mit der zusätzlichen Symmetrie heissen LRS (lokal rotationssymmetrisch).

Betrachten wir die Kasnerlösung mit Topologie T^3 als kosmologisches Modell. Das Volumen der Raumschnitte ist proportional t und dieses Volumen wächst monoton von Null bis unendlich. Dies ist typisch für ein immer expandierendes kosmologisches Modell. Die einzigen von Null verschiedenen Christoffelsymbole sind

$$\Gamma^0_{11} = p_1 t^{2p_1-1}, \quad \Gamma^0_{22} = p_2 t^{2p_2-1}, \quad \Gamma^0_{33} = p_3 t^{2p_3-1} \tag{39}$$
$$\Gamma^1_{01} = p_1 t^{-1}, \quad \Gamma^2_{02} = p_2 t^{-1}, \quad \Gamma^3_{03} = p_3 t^{-1} \tag{40}$$

und die Komponenten die daraus hervorgehen, indem man die Symmetrie der unteren Indizes benutzt. Die von Null verschiedenen Komponenten des Krümmungstensors sind

$$R_{1212} = p_1 p_2 t^{2(p_1+p_2-2)}, \quad R_{1313} = p_1 p_3 t^{2(p_1+p_3-2)}, \tag{41}$$
$$R_{2323} = p_2 p_3 t^{2(p_2+p_3-2)} \tag{42}$$
$$R_{0abc} = 0 \tag{43}$$
$$R_{0101} = p_1(1-p_1)t^{2p_1-2}, \quad R_{0202} = p_2(1-p_2)t^{2p_2-2}, \tag{44}$$
$$R_{0303} = p_3(1-p_3)t^{2p_3-2} \tag{45}$$

und die Komponenten die daraus hervorgehen, indem man die Eigenschaft benutzt, dass der Krummungstensor in den beiden Indexpaaren schiefsymmetrisch ist. Der Kretschmannskalar ist

$$R_{abcd}R^{abcd} + 4R_{0a0b}R^{0a0b} = (p_1^2 p_2^2 + p_2^2 p_3^2 + p_3^2 p_1^2)t^{-4} \tag{46}$$

Es folgt dass ausser im Fall, dass zwei p_i verschwinden der Kretschmannskalar für $t \to 0$ gleichmässig nach unendlich divergiert. Man sagt, dass es bei $t = 0$ eine Krümmungssingularität gibt. Die Raumzeit kann nicht jenseits von $t = 0$ fortgesetzt werden. Was passiert im Ausnahmefall wo zwei der p_i verschwinden? Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $p_1 = 1$ und dass $p_2 = p_3 = 0$. Die Metrik ist

$$-dt^2 + t^2 dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{47}$$

Der Krümmungstensor verschwindet identisch und deshalb ist diese Raumzeit flach. Sie heisst flache Kasnerlösung. In der Tat kann diese Raumzeit mit einem Teil des Minkowskiraums identifiziert werden. Wenn x als periodisch betrachtet wird redet man auch vom Misnerraum. Um die Beziehung zum flachen Raum zu sehen definiert man $\hat{t} = t \cosh x$ und $\hat{x} = t \sinh x$. Dann ist $-dt^2 + t^2 dx^2$ gleich $-d\hat{t}^2 + d\hat{x}^2$.

Betrachten wir eine zukunftsgerichtete kausale Geodäte mit affinem Parameter τ in einer allgemeinen Kasnerlösung. Die Gleichungen der Geodäten sind

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \sum_i p_i t^{2p_i-1} \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{48}$$
$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + 2p_i t^{-1} \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0 \tag{49}$$

Aus der Gleichung für x^i folgt dass (keine Summe) $\frac{dx^i}{d\tau} = A^i t^{-2p_i t}$ für Konstanten A^i. Wenn ϵ wie in Abschnitt 3.2 definiert wird, dann gilt

$$-\epsilon = -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \sum_i (A^i)^2 t^{-2p_i} \tag{50}$$

Um die geodätische Vollständigkeit zu sichern reicht es zu zeigen dass t^{p_i} für keinen Wert von i integrabel ist. Da $p_i \geq -1/3$ ist diese Bedingung erfüllt.

Zum Schluss des Abschnittes werden die verallgemeinerten Kasnerexponenten (VKE) definiert. Sei $(M, g_{\alpha\beta})$ eine Raumzeit mit einer Blätterung S_t durch raumartige Hyperflächen. Für jede Hyperfläche S_t können wir die zweite Fundamentalform wie folgt definieren. Es handelt sich um einen symmetrischen Tensor auf S_t und erfüllt

$$k_{ab} x^a y^b = X^\alpha \nabla_\beta Y^\beta n^\beta \tag{51}$$

Hierbei sind x^a und y^b beliebige Vektoren auf S_t, X^α und Y^β glatte Vektorfelder auf einer Umgebung von S_t, die mit x^a bzw. y^b auf S_t übereinstimmen und n^α ist der Einheitsnormalenvektor zu S_t. Das Ergebnis hängt nicht von den gewählten Fortsetzungen ab. Die Spur $\mathrm{tr}k = g^{ab} k_{ab}$ heisst mittlere Krümmung von S_t. Jetzt betrachten wir den Fall von Gausskoordinaten. Dies bedeutet, dass die Hyperflächen S_t Niveauflächen von t sind, $g_{00} = -1$, und die räumlichen Koordinaten so gewählt sind, dass $g_{0i} = 0$. In diesem Fall gilt die Beziehung $\partial_t g_{ab} = -2k_{ab}$. Damit lässt sich die zweite Fundamentalform für die Kasnerlösung leicht berechnen. Betrachten wir jetzt die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform bezüglich der induzierten Metrik, d.h. die Lösungen von $\det(k_{ab} - \lambda g_{ab}) = 0$. Es gibt drei Lösungen λ_1, λ_2, λ_3. Sei $p_i = \lambda_i / \sum_j \lambda_j$, unter der Annahme dass die mittlere Krümmung nicht verschwindet. Die p_i sind definitionsgemäss die verallgemeinerten Kasnerexponenten und im Fall der Kasnerlösungen stimmen sie mit den Kasnerexponenten überein. Die VKE erfüllen die erste Kasnerbeziehung aber im allgemeinen erfüllen sie die zweite Kasnerbeziehung nicht. Die VKE sind nützliche invariante Grössen bei der Beschreibung der Dynamik von Lösungen der Einsteingleichungen.

4 Materiemodelle

4.1 Energiebedingungen

Bevor wir uns einzelnen Materiemodellen zuwenden, sollen ein paar allgemeine Eigenschaften aufgelistet werden, die von vielen physikalisch vernünftigen Materiefeldern erfüllt werden. Es sind Ungleichungen, die der Energieimpulstensor erfüllen soll. Die schwache Energiebedingung sagt, dass $T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \geq 0$ für alle kausalen Vektoren V^α. Physikalisch besagt diese Bedingung, dass jeder Beobachter in seinem Ruhsystem eine positive Energiedichte misst. Die dominante Energiebedingung besagt, dass für jeden zukunftsgerichteten kausalen Vektor V^α der Vektor $T_{\alpha\beta} V^\beta$, falls ungleich Null, kausal und vergangenheitsgerichtet ist. Eine äquivalente Bedingung ist, dass für alle zukunftsgerichteten kausalen Vektorfelder V^α und W^α die Ungleichung $T_{\alpha\beta}V^\alpha W^\beta \geq 0$ gilt. Die starke Energiebedingung sagt, dass für alle zukunftsgerichteten kausalen Vektoren V^α die Ungleichung

$$[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta})g_{\alpha\beta}]V^\alpha V^\beta \geq 0 \tag{52}$$

gilt. Wenn die Einsteingleichungen mit $\Lambda = 0$ gelten ist diese Bedingung mit der geometrischen Bedingung $R_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta \geq 0$ äquivalent und bedeutet in gewissem Sinne dass die Gravitation anziehend ist. Die dominante Energiebedingung impliziert die schwache Energiebedingung. Leider impliziert die starke Energiebedingung die schwache Energiebedingung nicht. Eine andere Bedingung die von vielen Materiemodellen erfüllt ist ist die Bedingung über den mittleren Druck. Diese Bedingung besagt, dass für jeden zeitartigen Einheitsvektor V^α die Grösse $T^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta)$ nicht negativ ist.

4.2 Das Skalarfeld

Im Abschnitt 2.5 haben wir schon, ausser den Vakuumgleichungen ein Beispiel für ein Materiefeld eingeführt. Es handelte sich um das Skalarfeld. In einem weiteren Zusammenhang sollte man von einem linearen masselosen Skalarfeld reden. Eine allgemeinere Möglichkeit ist ein nichtlineares Skalarfeld ϕ mit einem Potential $V(\phi)$. Dabei ist V eine nichtnegative Funktion. In diesem Fall hat der Energieimpulstensor die Form

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \left[\frac{1}{2}(\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi) + V(\phi)\right]g_{\alpha\beta} \tag{53}$$

Die Bewegungsgleichung des Skalarfeldes ist

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\phi - V'(\phi) = 0 \tag{54}$$

Im Spezialfall wo $V(\phi) = (1/2)m^2\phi^2$ für eine positive Konstante m redet man von einem massiven Skalarfeld mit Masse m.

Um die dominante Energiebedingung zu überprüfen reicht es $T_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ zu betrachten für zwei zukunftsgerichtete zeitartige Einheitsvektoren X^α und Y^β. Durch eine geeignete Wahl einer orthonormalen Basis dürfen wir annehmen, dass X^α die Komponenten $(1, 0, 0, 0)$. hat. Ausserdem ist $Y^0 = \sqrt{1 + \delta_{ij}Y^iY^j}$. Es gilt

$$T_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2Y^0 + \partial_0\phi\partial_i\phi Y^i + \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi Y^0 + V(\phi)Y^0 \tag{55}$$

De letzte Term ist offensichtlich nichtnegativ. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt $|\partial_i\phi Y^i| \leq (\delta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi)^{1/2}(\delta^{kl}Y_kY_l)^{1/2}$ und der letzte factor auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist durch Y^0 beschränkt. Deshalb ist die Summe der ersten drei Terme im Ausdruck für $T_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ ist nichtnegativ und die dominante Energiebedingung ist erfüllt. Betrachten wir jetzt die starke Energiebedingung.

$$T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + V(\phi)g_{\alpha\beta} \tag{56}$$

Wenn $V = 0$ dann ist die starke Energiebedingung offenbar erfüllt. Für ein nichtverschwindendes Potential kann sie aber verletzt sein. Es reicht, den Fall zu betrachten in dem der Gradient von ϕ raumartig ist und man mit einem zeitartigen Vektor kontrahiert, der senkrecht auf $\nabla_\alpha \phi$ steht. Dies hat mit einer inflationären Expansion zu tun, wie später genauer erklärt wird. Eine positive kosmologische Konstante führt auch zu einer Verletzung der Bedingung $R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \geq 0$ für zeitartige Vektoren V^α und hat auch einen inflationären Effekt. Die Bedingung über den mittleren Druck kann selbst im Falle eines verschwindenden Potentials verletzt sein. Um dies zu zeigen, sei der Gradient von ϕ raumartig und sei V^α ein zeitartiger Vektor der auf $\nabla_\alpha \phi$ senkrecht steht. Dann, mit $V(\phi) = 0$, gilt

$$T_{\alpha\beta}(g^{\alpha\beta} + V^\alpha V^\beta) = -\frac{1}{2}(\nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi) \tag{57}$$

4.3 Das Maxwellfeld

In diesem Fall ist das fundamentale Objekt der elektromagnetische Feldtensor $F_{\alpha\beta}$ der schiefsymmetrisch ist. Der Energieimpulstensor ist

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma} F_\beta{}^\gamma - (1/4)(F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) g_{\alpha\beta} \tag{58}$$

Dieser Tensor ist Spurfrei, $g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$. Die Bewegungsgleichungen sind die Maxwellgleichungen und lauten

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \tag{59}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta \tag{60}$$

Im Falle, das der Viererstrom j^α verschwindet definieren diese Gleichungen das Einstien-Maxwell-System ohne Quellen. Wenn wir geladene Materie beschreiben wollen, müssen wir weitere Materiefelder einführen, um diese zu beschreiben. Der Strom wird dann von diesen anderen Feldern abhängen. Sie tragen auch zum Energieimpulstensor bei.

Die Beziehung von $F_{\alpha\beta}$ zu der klassischen Beschreibung des Maxwellfeldes durch das elektrische Feld E^a und das Magnetfeld B^a ist (im Minkowskiraum) wie folgt:

$$F_{01} = -E^1, \quad F_{02} = -E^2, \quad F_{03} = -E^3 \tag{61}$$

$$F_{12} = -B^3, \quad F_{13} = B^2, \quad F_{23} = -B^1 \tag{62}$$

Eine algebraische Untersuchung des Tensors $F^\alpha{}_\beta$, die hier nicht ausgeführt wird, zeigt dass $F_{\alpha\beta}$ in eine der folgenden zwei Formen gebracht werden kann:

$$F_{\alpha\beta} = A l_{[\alpha} n_{\beta]} + B x_{[\alpha} y_{\beta]} \tag{63}$$

$$F_{\alpha\beta} = C l_{[\alpha} x_{\beta]} \tag{64}$$

Hier bezeichnen die eckigen Klammern die schiefsymmetrische Form eines Tensors, z. B. $T_{[\alpha\beta]} = (1/2)(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$. Für den späteren Gebrauch erwähnen wir, dass runde Klammern die symmetrische Form eines Tensors bezeichnen, z. B. $T_{(\alpha\beta)} = (1/2)(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$. Die Vektoren l^α und n^α sind lichtartig und nicht parallel während x^α und y^α raumartig sind. Die lichtartigen Vektoren stehen senkrecht auf die raumartigen. Die Grössen A, B und C sind Konstanten. Indem wir diese Konstanten geeignet wählen können wir annehmen, dass $l_\alpha n^\alpha = -1$ und dass x^α and y^α Einheitsvektoren sind. Wir bekommen deshalb in den zwei Fällen

$$T_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{4}[A^2(l_\alpha n_\beta + n_\alpha l_\beta) + B^2(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta)] + \tfrac{1}{8}(A^2 - B^2)g_{\alpha\beta} \tag{65}$$

$$T_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{4}C^2 l_\alpha l_\beta \tag{66}$$

Im zweiten Fall sind die dominante und starke Energiebedingungen offensichtlich erfüllt. Die Bedingung über den mittleren Druck gilt auch. Im ersten Fall ist es etwas schwieriger, die dominante Energiebedingung nachzuweisen. Die Metrik kann in der Form

$$g_{\alpha\beta} = -l_\alpha n_\beta - n_\alpha l_\beta + x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta \tag{67}$$

geschrieben werden. Infolgedessen gilt

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)(l_\alpha n_\beta + n_\alpha l_\beta + x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta) \tag{68}$$

Es reicht also aus zu zeigen, dass der Tensor $l_\alpha n_\beta + n_\alpha l_\beta + x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta$ die dominante Energiebedingung erfüllt. Sei $V^\alpha = Ml^\alpha + Nn^\alpha + Px^\alpha + Qy^\alpha$ für Konstanten M, N, P und Q. Dann gilt

$$W_\alpha = (l_\alpha n_\beta + n_\alpha l_\beta + x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta)V^\beta = -Ml_\alpha - Nn_\alpha + Px_\alpha + Qy_\alpha \tag{69}$$

und

$$V^\alpha V_\alpha = -2LM + P^2 + Q^2 = W^\alpha W_\alpha \tag{70}$$

Es folgt, dass $T_{\alpha\beta}$ kausale Vektoren auf ebensolche abbildet. Dass diese geeignet zeitlich orientiert sind folgt aus der Beziehung $T_{\alpha\beta}V^\alpha l^\beta = -V_\alpha l^\alpha$. Deshalb ist die dominante Energiebedingung auch in diesem Fall erfüllt. Auf Grund der Tatsache, dass der Energieimpulstensor spurfrei ist, gelten auch die starke Energiebedingung und die Bedingung über den mittleren Druck.

4.4 Die ideale Flüssigkeit

Die ideale Flüssigkeit wird durch die Energiedichte ρ, der Druck p und die Vierergeschwindigkeit U^α beschrieben. Es gilt $g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = -1$. Der Energieimpulstensor ist

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta} \tag{71}$$

Es wird angenommen, das ρ und p nichtnegativ sind. Die Natur der Flüssigkeit wird durch eine Zustandsgleichungen $p = f(\rho)$ gegeben. Eine minimale Eigenschaft, die diese Zustandsgleichung erfüllen soll ist, dass f stetig differenzierbar ist für $\rho > 0$ und dass dort $f'(\rho) \geq 0$. Eine physikalische Erklärung dafür ist, dass $f'(\rho)$ gleich dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit ist. Mathematisch sorgt diese Bedingung (in der verschärften Form $f'(\rho) > 0$) dafür, dass die Gleichungen ein sachgemäss gestelltes Anfangswertproblem besitzen. Eine physikalisch wünschenswerte Bedingung ist, dass $f'(\rho) \leq 1$, da diese Ungleichung die Interpretation hat, dass die Schallgeschwindigkeit nicht höher ist als die Lichtgeschwindigkeit. Die Bewegungsgleichungen, die Eulergleichungen, sind $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Diese Beziehung muss für jeden Energieimpulstensor gelten. Die Besonderheit in diesem Fall ist dass sie mit den Bewegungsgleichungen äquivalent ist. Ein Spezialfall der idealen Flüssigkeit ist der, wo der Druck identisch Null ist. In diesem Fall redet man von Staub. Lösungen der Einsteingleichungen mit Staub werden oft betrachtet, obwohl sie manchmal unerwünschte Eigenschaften haben. Eine lineare Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1)\rho$ mit $1 < \gamma \leq 2$ ist auch eine häufige Wahl. Im Fall $\gamma = 4/3$ spricht man von Strahlung. Wenn der Raum mit Strahlung gefllt ist kann man eine effektive Beschreibung durch eine Flüssigkeit mit dieser Zustandsgleichung einführen.

Um die Energiebedingungen für eine ideale Flüssigkeit zu überprüfen ist es nützlich eine Basis zu wählen, die der Vierergeschwindigkeit angepasst ist. Dann gilt

$$T_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta = \rho V^0 W^0 + p \delta_{ij} V^i W^j \tag{72}$$

Deshalb reicht die vernünftige Bedingung, dass $p \leq \rho$ aus, damit die dominante Energiebedingung erfüllt ist.

$$(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}) V^\alpha V^\beta = \frac{1}{2}(\rho + 3p)(V^0)^2 + \frac{1}{2}(\rho - p)\delta_{ij} V^i V^j \tag{73}$$

Vorausgesetzt, dass $p \leq \rho$ und $\rho + 3p \geq 0$ gilt die starke Energiebedingung.

$$T_{\alpha\beta}(g^{\alpha\beta} + V^\alpha V^\beta) = \rho[(V^0)^2 - 1] + p(3 + \delta_{ij} V^i V^j) \tag{74}$$

Es folgt aus deiser Beziehung, dass die Bedingung über den mittleren Druck in diesem Fall gilt.

4.5 Stossfreie Materie

Stossfreie Materie besteht aus Teilchen, die sich ohne direkte Wechselwirkung untereinander bewegen und die statistisch beschrieben werden. Die fundamentale Grösse ist eine Funktion $f(x^\alpha, p^\alpha)$. Sie beschreibt die Dichte von Teilchen in einem gegebenen Punkt der Raumzeit mit gegebenem Viererimpuls p^α und ist nichtnegativ. Der Energieimpulstensor wird durch Integration über die Impulse gewonnen:

$$T^{\alpha\beta}(x^\alpha) = \int p^\alpha p^\beta f(x^\alpha, p^\alpha)(\det g)^{1/2} dp^\alpha \tag{75}$$

Die Bewegungsgleichung ist die Vlasovgleichung

$$p^\alpha \partial f / \partial x^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma \partial f / \partial p^\alpha = 0 \tag{76}$$

Oft beschränkt man sich auf Teilchen mit der Masse Eins. Dann ist $g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = -1$ und p^0 kann als Funktion von p^a aufgefasst werden. Dann ist der Energieimpulstensor

$$T^{\alpha\beta}(t,x^a) = -\int p^\alpha p^\beta f(t,x^a,p^a)/p_0(\det g)^{1/2}dp^a \tag{77}$$

Die Vlasovgleichung lautet in dem Fall

$$\partial f/\partial t + (p^a/p^0)\partial f/\partial x^a + (\Gamma^a_{\beta\gamma}p^\beta p^\gamma/p^0)\partial f/\partial p^a = 0 \tag{78}$$

Im Falle der stossfreien Materie sind alle oben eingeführten Energiebedingungen erfüllt. Ausserdem ist die Bedingung über den mittleren Druck erfüllt.

5 Kosmologische Modelle

Ein kosmologisches Modell ist ein Modell des Universums auf den grössten Skalen, die wir beobachten können. Dabei werden die Strukturen auf kleineren Skalen, z. B. Galaxien mehr oder weniger vernachlässigt. Die Kasnerlösung, die wir schon gesehen haben, ist eine Art kosmologisches Modell. Diese Lösung enthält keine Materie und ist deshalb keine gute Beschreibung unseres Universums. Besser ist es, Materie einzubeziehen. Das einfachste und beliebteste Modell ist das Einstein-de Sitter Modell (das nichts mit der de Sitter-Lösung zu tun hat ausser ihres gemeinsamen Entdeckers). Die Metrik ist

$$-dt^2 + t^{4/3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{79}$$

Die Metrik erfüllt die Einsteingleichungen mit Staub. Die Vierergeschwindigkeit hat die Komponenten $(1,0,0,0)$ und die Dichte hängt nur von t ab. Diese Metrik hat die volle Euklidische Gruppe als Symmetriegruppe. Sie ist invariant unter Translationen in x, y und z. Man sagt, dass die Raumzeit homogen (oder, ausführlicher, räumlich homogen) ist. In jeder Zeitschicht, d.h. in jeder Niveaufläche der Funktion t, ist jeder Punkt mit jedem anderen äquivalent. Sie sind nämlich durch eine Symmetrie der Raumzeit miteinander verbunden. Dies ist die Bedeutung des Wortes 'homogen'. Die Metrik ist auch unter allen Rotationen um einen beliebigen Punkt des (x,y,z)- Raumes invariant. Man sagt, dass die Raumzeit isotrop ist. In jedem Punkt einer Zeitschicht werden alle Richtungen im Tangentialraum äquivalent. Sie sind durch Symmetrien der Raumzeit miteinander verbunden. Physikalisch entspricht die Eigenschaft der Isotropie der Tatsache dass, nach einer geeigneten Mittelung, der Himmel in allen Richtungen gleich aussieht.

Im Vergleich zu dieser Lösung ist die Kasnerlösung homogen aber nicht isotrop. Die induzierte Metrik auf jeder Zeitschicht ist flach. Man sagt, dass das Modell räumlich flach ist. Die Modelle, die homogen und isotrop sind heissen FLRW-Modelle (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) und das Einstein-de Sitter Modell ist ein Spezialfall davon. Man redet oft von einem flachen FLRW-Modell, aber dies ist irreführend. Die Krümmung dieser Raumzeit ist von Null verschieden.

Wenn wir in x, y und z identifizieren, bekommen wir ein räumlich kompaktes Modell. Die räumliche Topologie ist die von einem Torus. Das Volumen der Raumschnitte ist gleich t^2. Das Volumen des Raumes wächst ständig mit t und wir reden von einem expandieren Universum. Die Integralkurven der Vierergeschwindigkeit können wir mit den Weltlinien von Galaxien identifizieren und der Abstand zwischen diesen Weltlinien wächst auch mit t. Informationen zu allgemeineren FLRW-Modellen gibt es in meinem Text über kosmologische Modelle.

6 Die Gowdyraumzeiten

Dieser Abschnitt befasst sich mit den Gowdyraumzeiten, einer Klasse von inhomogenen Lösungen der Einsteinschen Vakuumgleichungen. Diese Raumzeiten haben eine zweidimensionale Isometriegruppe, die auf raumartigen Flächen operiert. Nachdem wir durch diese Symmetrie faktorisiert haben, bekommen wir ein effektives Problem in einer Raum- und einer Zeitdimension. Diese Klasse von Raumzeiten dient als Versuchsobjekt um die dynamischen Eigenschaften von Lösungen der Einsteingleichungen unter relativ einfachen Bedingungen zu studieren. Das Verhalten dieser besonderen Klasse von Lösungen ist bemerkenswert vielfältig.

In geeigneten Koordinaten kann die Metrik in folgender Form geschrieben werden:

$$t^{-1/2}e^{\lambda/2}(-dt^2+dx^2)+t(e^P(dy+Qdz)^2+e^{-P}dz^2) \tag{80}$$

Hier ist $t>0$ und P, Q und λ sind Funktionen von t und x die in ihrer Abhängigkeit von x periodisch sind. Die Einsteingleichungen sind in diesem Fall mit folgenden fünf Gleichungen äquivalent:

$$P_{tt}+t^{-1}P_t-P_{xx} = e^{2P}(Q_t^2-Q_x^2) \tag{81}$$
$$Q_{tt}+t^{-1}Q_t-Q_{xx} = -2(P_tQ_t-P_xQ_x) \tag{82}$$
$$\lambda_t = t[P_t^2+P_x^2+e^{2P}(Q_t^2+Q_x^2)] \tag{83}$$
$$\lambda_x = 2t(P_tP_x+e^{2P}Q_tQ_x) \tag{84}$$
$$\lambda_{tt}+t^{-1}\lambda_t-\lambda_{xx} = 2(P_x^2+e^{2P}Q_x^2) \tag{85}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass wenn die ersten vier Gleichungen erfüllt sind die fünfte auch gilt. Es ist zu beachten, dass die ersten zwei Gleichungen unabhängig von λ sind. Deshalb ist es eine natürliche Strategie, wenn man diese Gleichungen studiert, dass man zuerst die Wellengleichungen für P und Q löst und dann das Ergebnis in die Gleichungen für λ einsetzt. Die geeigneten Anfangsdaten für die Wellengleichungen bestehen aus den Einschränkungen der Funktionen P, P_t, Q und Q_t auf eine Hyperfläche $t=t_0>0$. Wir können die Daten nicht bei $t=0$ vorschreiben weil die Gleichungen dort singulär sind. Damit die Daten mit allen Einsteingleichungen verträglich sind, dürfen sie nicht ganz ohne Einschränkung vorgeschrieben werden. Wenn man die Gleichung für λ_θ in θ integriert, und die Periodizität verwendet, erhält man die Einschränkung

$$\int_0^{2\pi} P_t(t_0,x)P_x(t_0,x)+e^{2P(t_0,x)}Q_t(t_0,x)Q_x(t_0,x)dx=0 \tag{86}$$

Wenn P und Q die Wellengleichungen oben erfüllen dann gilt folgende Identität:

$$\partial_x(t[P_t^2 + P_x^2 + e^{2P}(Q_t^2 + Q_x^2)]) = \partial_t[2t(P_t P_x + e^{2P} Q_t Q_x)] \tag{87}$$

Wenn man diese Beziehung in x intergriert sieht man, dass die Gültigkeit der Verträglichkeitsbedingung (86) für irgendeinen Wert t_0 von t, deren Gültigkeit für alle Werte von t nach sich zieht. Darüber hinaus zeigt diese Beziehung, dass wenn die Gleichung für λ_x für $t = t_0$ erfüllt ist, und die Gleichung für λ_t überall dann gilt die Gleichung für λ_x überall. Deshalb können wir, wenn wir die Einsteingleichungen für Gowdyraumzeiten lösen wollen folgendermassen vorgehen. Zuerst werden die Wellengleichungen für P und Q gelöst mit Anfangsdaten bei $t = t_0$ die die Einschränkung (86) erfüllen. Dann wird λ für $t = t_0$ bestimmt indem man die Gleichung für λ_x dort integriert. Als nächstes wird λ weg von der Anfangshyperfläche bestimmt, indem man die Gleichung für λ_t in der Zeit integriert, ausgehend von $t = t_0$. Nachdem alle diese Schritte ausgeführt worden sind, sind alle Einsteingleichungen erfüllt. Deshalb sind in Gowdyraumzeiten die wesentlichen Gleichungen die Wellengleichungen für P und Q, die wir als Gowdygleichungen bezeichnen.

Einen Spezialfall der Gowdygleichungen bekommt man indem man $Q = 0$ setzt. Die Gleichung für P die dadurch entsteht ist linear und heisst polarisierte Gowdygleichung. Es ist leicht, explizite Lösungen der polarisierten Gowdygleichung aufzuschreiben. Nehmen wir an, dass $P(t, x) = p(t) \sin nx$ für eine Funktion $p(t)$ und eine positive ganze Zahl n ist. Dann gilt

$$p_{tt} + t^{-1} p_t + n^2 p = 0 \tag{88}$$

Die Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung sind Besselfunktionen, deren asymptotisches Verhalten für $t \to 0$ und $t \to \infty$ man gut versteht. Da die Gleichung linear ist, sind endliche Linearkombinationen dieser Lösungen auch Lösungen. Eine mögliche Strategie, um die allgemeine Lösung zu untersuchen wäre zu versuchen die Lösung als Reihe in diesen expliziten Lösungen (und den entsprechenden Lösungen mit cosinus statt sinus) zu entwickeln. In der Praxis zeigt sich diese Methode als wenig nützlich. Auf jeden Fall kann diese Methode nicht auf die allgemeinen Gowdygleichungen ausgedehnt werden, da diese nichtlinear sind.

Um allgemeine Lösungen der Gowdygleichungen zu studieren, betrachten wir das Anfangswertproblem. Die erste Frage ist die der lokalen Existenz und Eindeutigkeit. Wenn Anfangsdaten auf $t = t_0$ vorgeschrieben werden, existiert eine entsprechende Lösung, zumindest auf einem kurzen Zeitintervall? Um konkret zu sein, nehmen wir an, dass die Daten glatt (C^∞) sind und dass wir eine glatte Lösung suchen. Die Gleichungen sind semilinear und hyperbolisch und bekannte Ergebnisse aus der Theorie der hyperbolischen Gleichungen liefern eine positive Antwort auf die Frage nach lokaler Existenz und Eindeutigkeit. Sie liefern auch die globale Eindeutigkeit.

Die nächste Frage ist die nach der globalen Existenz. Die Antwort hängt von der genauen Struktur der Gleichungen ab. Betrachten wir zum Vergleich die Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = u_t^2 \tag{89}$$

Eine einfache Lösung dieser Gleichung ist $u(t,x) = -\log(2-t)$. Wenn wir $t_0 = 1$ wählen hat diese Lösung die Anfangsdaten $u(x) = 0$ und $u_t(x) = 1$ bei $t = t_0$. Die eindeutige entsprechende Lösung wird bei $t = 2$ singulär und deshalb gibt es keine globale Existenz. Im Falle der Gowdygleichungen sieht die Sache besser aus. In 1981 hat V. Moncrief [6] gezeigt, dass jede Wahl von Anfangsdaten für die Gowdygleichungen bei $t = t_0 > 0$ zu einer Lösung führt, die auf dem ganzen Zeitintervall $(0, \infty)$ definiert ist.

Wenn es bekannt ist, dass eine globale Lösung auf dem Zeitintervall existiert, das uns interessiert können wir nach dem asymptotischen Verhalten der Lösung für $t \to 0$ und $t \to \infty$ fragen. Im folgenden wird die asymptotische Form für allgemeine polarisierte Gowdylösungen in der Nähe von $t = 0$ bewiesen. Das Verhalten für $t \to \infty$ is schwerer zu kontrollieren. Die Methode, die wir benutzen werden um das Verhalten in der Nähe von $t = 0$ zu bestimmen ist die der Energieabschätzungen. Es handelt sich um eine der wichtigsten Techniken der Theorie der hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen.

Für den Beweis brauchen wir folgende Ungleichung für periodische Funktionen in einer Dimension:

$$|f(x)| \leq C \left[\int (f(y))^2 + (f_x(y))^2 dy \right]^{1/2} \tag{90}$$

Jetzt wird diese Ungleichung bewiesen.

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f_x(y)| dy \leq (2\pi)^{1/2} \left[\int_0^{2\pi} |f_x(y)|^2 dy \right]^{1/2} \tag{91}$$

wobei die Cauchy-Schwarz-Ungleichung benutzt wurde. Es gibt einen Punkt x_0 mit der Eigenschaft, dass der Wert von f gleich dem Mittelwert $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dy$ ist. Wenn wir in dieser Ungleichung $x_1 = x_0$ setzen und einen beliebigen Punkt x als x_2 wählen, bekommen wir

$$|f(x)| \leq |\bar{f}| + (2\pi)^{1/2} \left[\int_0^{2\pi} |f_x(y)|^2 dy \right]^{1/2} \tag{92}$$

Auf der anderen Seite folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass $|\bar{f}| \leq (2\pi)^{-1/2} [\int f^2(y) dy]^{1/2}$. Diese zwei Ergebnisse zusammen implizieren die Ungleichung (90). Es handelt sich um ein einfaches Beispiel einer Sobolev-Ungleichung. Sobolev-Ungleichungen, die es erlauben, eine Funktion gleichmässig durch Integralnormen abzuschätzen, spielen eine sehr wichtige Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und, insbesondere, in der Theorie der hyperbolischen Gleichungen.

Wenn P eine Lösung der polarisierten Gowdygleichung ist, sei

$$E(t) = t^2 \int_0^{2\pi} (P_t^2 + P_x^2)(t,x) dx \tag{93}$$

Dann gilt $dE/dt = 2t \int_0^{2\pi} (P_x(t,x))^2 dx$. Insbesondere gilt $E_t \geq 0$ und infolgedessen ist $E(t) \leq E(t_0)$ für $t \leq t_0$. Wir können auch analoge Grössen

E_n definieren, indem wir P durch $\partial_x^n P$ in der Definition von E ersetzen. Die Tatsache, dass alle Grössen E_n für $t \leq t_0$ beschränkt sind impliziert, mittels der Sobolev-Ungleichung, dass tP und alle räumlichen Ableitungen davon beschränkt sind.

Die polarisierte Gowdygleichung kann in der Form $\partial_t(tP_t) = tP_{xx}$ geschrieben werden. Die rechte Seite ist auf dem Intervall $(0, t_0]$ beschränkt. Indem wir diese Beziehung einmal integrieren bekommen wir

$$t_0 P_t(t_0) - tP_t(t) = \int_t^{t_0} sP_{xx}(s, x)ds \tag{94}$$

Da die Grösse im Integral beschränkt ist, kann diese Beziehung folgendermassen geschrieben werden:

$$tP_t(t) = t_0 P_t(t_0) - \int_0^{t_0} sP_{xx}(s, x)ds + \int_0^t sP_{xx}(s, x)ds \tag{95}$$

Sei $k(x) = t_0 P_t(t_0) - \int_0^{t_0} sP_{xx}(s, x)ds$. Dann gilt $P_t(t, x) = k(x)t^{-1} + O(1)$ für $t \to 0$. Diese Beziehung kann nochmal intergriert werden, mit dem Ergebnis

$$P(t_0) - P(t) = k(x)[\log t_0 - \log t] + \int_0^{t_0} r(s, x)ds - \int_0^t r(s, x)ds \tag{96}$$

wobei $r(t, x)$ der Rest, der $O(1)$ ist, im Ausdruck für P_t ist. Wenn $\phi = P(t_0) - \pi \log t_0 - \int_0^{t_0} r(s, x)ds$ dann ist $P(t, x) = k(x) \log t + \phi(x) + O(t)$. Die Beziehungen die man erhält, indem man jeden Term in dieser Entwicklung wiederholt nach t und x differenziert sind auch gültig, was mit ähnlichen Techniken bewiesen werden kann. Jede Lösung der polarisierten Gowdygleichung kann in dieser Form geschrieben werden. Umgekehrt kann man zeigen, dass zu jedem paar (π, ω) von glatten Funktionen es eine eindeutige Lösung der polarisierten Gowdygleichung gibt, in deren Entwicklung genau diese Funktionen als Koeffizienten vorkommen. Dies bedeutet, dass im Endeffekt alle Lösungen dieser Gleichungen durch die Funktionen π und ω parametrisiert werden können. Diese Funktionen spielen die Rolle von Daten auf der Singularität.

Die Asymptotik der Lösungen der polarisierten Gowdygleichungen für $t \to \infty$ wird jetzt ohne Beweis beschrieben. Wir haben

$$P(t, x) = A \log t + B + t^{-1/2}\nu(t, x) + o(t^{-1/2}) \tag{97}$$

wobei A and B konstant sind und ν die Wellengleichung $\nu_{tt} = \nu_{xx}$ im flachen Raum erfüllt. Da die Gleichung für ν wellenartige Lösungen hat, deren Amplitude konstant bleibt, haben die Lösungen bleibende Oszillationen. Die Amplitude der Oszillationen in P klingt wie $t^{-1/2}$ ab, aber die Lösung erlaubt keine Entwicklung der Form $P(t, x) = \sum_k A_k(x)t^{-p_k}$. Die Gültigkeit dieser Entwicklung wurde in [4] bewiesen. Dieses Ergebnis reicht aus um zu zeigen, dass die polarierten Gowdyraumzeiten in der Zukunft geodätisch vollständig sind.

Zum Schluss machen wir einige Bemerkungen zum nicht-polarisierten Fall. Die Beweise sind zu kompliziert, um hier angegeben zu werden. Seien vier

Funktionen k, ϕ, Q_0 und ψ gegeben mit $0 < k(x) < 1$ für alle x. Dann existiert eine eindeutige Lösung der Gowdygleichungen mit folgender asymptotischer Entwicklung:

$$P(t,x) = k(x)\log t + \phi(x) + o(1) \tag{98}$$

$$Q(t,x) = Q_0(x) + t^{2k(x)}\psi(x) + o(t^{2k(x)}) \tag{99}$$

Diese Aussage wurde in [5] im Fall von analytischen Daten bewiesen und wurde in [9] auf den glatten Fall verallgemeinert. Die Bedingung $k < 1$ spielt eine sehr wichtige Rolle und es ist nicht zu erwarten, dass man ohne diese Bedingung auskommt. Die Frage, welche Daten auf $t = t_0$ zu einer Lösung mit dieser Asymptotik führen, ist schwieriger. Es ist bewiesen worden dass alle Gowdy-Raumzeiten in der Zukunft geodätisch vollständig sind [10] und dass für generische Anfangsdaten der Kretschmannskalar im Limes $t \to 0$ gleichmässig gegen undendlich strebt [11].

7 Kugelsymmetrie

7.1 Der asymptotisch flache Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir Metriken der Form

$$-e^{2\mu(t,r)}dt^2 + e^{2\lambda(t,r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{100}$$

Das einfachste Beispiel ist das in dem die Funktionen μ und λ identisch verschwinden. In diesem Fall erhalten wir den Minkowski-Raum in sphärischen Polarkoordinaten. Die Metrik (100) ist invariant unter allen Rotationen in den Winkelkoordinaten. Die Raumzeit hat die volle Symmetrie der Standardsphäre und heisst deshalb kugelsymmetrisch. Sie ist in einem speziellen System von Koordinaten, Schwarzschild-Koordinaten genannt ausgedrückt. Diese Koordinaten werden durch zwei Bedingungen charakterisiert. Erstens, der Faktor vor der Metrik der Standardsphäre wird durch das Quadrat der Koordinatenfunktion r gegeben. In diesem Fall heisst r Flächenradius weil es dadurch bestimmt ist, dass die Oberfläche der Sphären der Symmetrie proportional r^2 ist. Zweitens stehen die Kurven auf denen (t, θ, ϕ) konstant sind senkrecht auf die Kurven auf denen (r, θ, ϕ) konstant sind. Diese Bedingung ist damit äquivalent dass $g_{01} = 0$. Es ist auch so dass g_{02}, g_{03}, g_{12} und g_{13} verschwinden aber diese Bedingung ist in kugelsymmetrischen Raumzeiten so natürlich dass sie fast immer angenommen wird.

Wir möchten Raumzeiten betrachten die isolierte physikalische Systeme beschreiben. Ein gutes Beispiel eines isolierten Systems ist das Sonnensystem. Die Bewegung der Planeten unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen gravitativen Wechselwirkung wird von Ereignissen ausserhalb des Sonnensystems kaum beeinflusst. Wir können es also ein isoliertes System nennen und ein idealisiertes Modell benutzen in dem das Sonnensystem in einem sonst leeren Universum sitzt. Weit enfernt von dem Gebiet in dem das Sonnensystem sich befindet gibt es keine Materie und das Gravitationsfeld wird immer schwächer. Ein einzelner Stern wie die Sonne kann auch als isoliertes System beschrieben werden. In dem Fall ist es vernünftig ein kugelsymmetrisches Modell zu verwenden. Das fällt in die Klasse von Modellen die in diesem Abschnitt behandelt werden. Auch ein Kugelsternhaufen, eine sphärische Ansammlung von einer grossen Anzahl Sterne (vielleicht etwa hunderttausend) kann auf diese Weise modelliert werden.

In der AR wird der Begriff des isolierten Systems mithilfe der asymptotisch flachen Raumzeiten formalisiert. Es sind Raumzeiten in denen in grossen räumlichen Abständen der Energieimpulstensor Null ist, oder zumindest sehr klein, und die Metrik sich der Minkowskimetrik nähert. Für die oben eingeführte kugelsymmetrische Metrik kann diese Eigenschaft als die Bedingung übersetzt werden dass $\mu(t,r)$ und $\lambda(t,r)$ für r gegen unendlich bei t fest gegen Null konvergieren. Es gibt eine andere wichtige Koordinatenbedingung, die des regulären Zentrums. Sie bedeutet dass $\lambda(t,0)=0$ für jeden Wert von t und sorgt dafür dass für kleine Kreise mit konstanter Entfernung vom Ursprung in einer Hyperfläche mit t konstant das Verhältnis von Umfang zu Radius gegen 2π konvergiert. Die Bedingung ist notwendig wenn die in Koordinaten geschriebene Metrik eine Geometrie beschreiben soll die bei $r=0$ glatt ist. Dort gibt es dann nur eine Koordinaten-Singularität und keine echte geometrische Singularität. Wenn λ gegen einen anderen konstanten Wert streben sollte, dann gäbe es einen Kegel bei $r=0$ anstatt einer glatten Metrik.

Als Folge der Kugelsymmetrie sind die einzigen von Null verschiedenen Komponenten des Energieimpulstensors T_{00},$T_{01}=T_{10}$, T_{11}, $T_{22}=T_{33}$. Um diese Tatsache zu beweisen betrachten wir die orthonormale Basis $e_0=e^{-\mu}\partial/\partial t$, $e_1=e^{-\lambda}\partial/\partial r$, $e_2=r^{-1}\partial/\partial\theta$, $e_3=r^{-1}(\sin\theta)^{-1}\partial/\partial\phi$. Da es eine Rotation gibt, die e_0 and e_1 festhält und e_2 in $-e_2$ überführt folgt dass T_{02}, T_{03}, T_{12} und T_{13} verschwinden. Eine Rotation die e_2 in e_3 überführt und e_3 in $-e_2$ zeigt dass T_{23} verschwindet und dass $T_{22}=T_{33}$. Folgende Notation wird eingeführt um die nichtverschwindenden Komponenten des Energieimpulstensors zu parametrisieren. $\rho=T(e_0,e_0)$, $j=-T(e_0,e_1)$, $p=T(e_1,e_1)$, und $q=T(e_2,e_2)+T(e_3,e_3)$. Die Einsteingleichungen haben dann die Form

$$\begin{aligned} e^{-2\lambda}(2r\lambda'-1)+1 &= 8\pi r^2\rho && (101)\\ e^{-2\lambda}(2r\mu'+1)-1 &= 8\pi r^2 p && (102)\\ \dot\lambda &= -4\pi r e^{\lambda+\mu}j && (103)\\ e^{-2\lambda}(\mu''+(\mu'-\lambda')(\mu'+1/r))-e^{-2\mu}(\ddot\lambda+\dot\lambda(\dot\lambda-\dot\mu)) &= 4\pi q && (104) \end{aligned}$$

Hier bedeuten Punkt bzw. Strich die Ableitungen bezüglich t bzw. r.

Wir betrachten jetzt den Vakuumfall, wobei die Randbedingungen zunächst vernachlässigt werden. Es folgt aus den Feldgleichungen dass $(re^{-2\lambda})'=1$. Deshalb ist $re^{-2\lambda}=r-2m$ für eine Konstante m und $e^{-2\lambda}=1-2m/r$. Die Konstante m hätte von vornherein von t abhängen können aber dies wird durch die Feldgleichung für $\dot\lambda$ ausgeschlossen. Eine Kombination aus zwei Feldgleichungen ergibt $r(\lambda'+\mu')=0$. Deshalb ist $\lambda+\mu=C(t)$ fuer eine Konstante $C(t)$ die von t abhängt. Es folgt dass $e^{\mu(t,r)}=(1-2m/r)^{1/2}e^{C(t)}$. Durch eine Reparametrisierung von t kann man $C(t)$ gleich eins setzen. Es folgt die Metrik

$$-(1-2m/r)dt^2+(1-2m/r)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2 d\phi^2) \qquad (105)$$

Diese Metric definiert die Schwarzschild-Raumzeit, das Standardmodell für ein Schwarzes Loch in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Es gibt zwei Stellen wo die Schwarzschild-Metrik anscheinend singulär wird, nämlich für $r = 0$ und $r = 2m$. Um mehr über die Natur dieser Singularitäten herauszufinden betrachten wir den Kretschmann-Skalar. Er wird durch $48m^2/r^6$ gegeben. Deshalb ist die Singularität bei $r = 0$ eine geometrische Singularität und es ist nicht möglich, die Metrik durch $r = 0$ fortzusetzen. Andererseits bleibt der Kretschmann-Skalar beschränkt für $r \to 2m$ und dies deutet an, dass es sich um eine Koordinaten-Singlarität handeln könnte. Es ist in der Tat so. Um diesen Umstand zu sehen führen wir ein neues Koordinatensystem ein, die Eddington-Finkelstein-Koordinaten. Wir definieren $r^* = r + 2m \log(r - 2m)$ und $v = t + r^*$. In den Koordinaten (v, r, θ, ϕ) hat die Schwarzschild-Metrik die Form

$$-(1 - 2m/r)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \tag{106}$$

Dadurch wird gezeigt dass die Metrik eine reguläre Fortsetzung durch $r = 2m$ besitzt. Die Kurven auf denen r konstant ist werden lichtartig wenn r gegen $2m$ strebt. Die Kurven auf denen t konstant ist stehen senkrecht darauf. Deshalb werden diese Kurven parallel wenn der Gradient von r lichtartig wird. In diesem Punkt bilden die Funktionen t und r kein Koordinatensystem mehr.

Für $m = 0$ reduziert sich die Schwarzschild-Lösung auf die Minkowskimetrik. Es ist möglich, Geodäten der Schwarzschild-Lösung für grosse Werte von r zu betrachten und zu sehen dass sie durch die Bahnen von Newtonschen Teilchen approximiert werden, die sich im Gravitationsfeld eines Punktteilchens m bewegen. Die Schwarzschild-Lösung ist also das allgemein-relativistische Analogon einer Punktmasse in der Newtonschen Theorie und m sollte nichtnegativ sein um physikalisch vernünftig zu sein. Es kann in der Tat gezeigt werden dass die Schwarzschild-Lösung mit negativer Masse unerwünschte Eigenschaften hat. Sie ist nicht global hyperbolisch und kann durch keine Fortsetzung global hyperbolisch gemacht werden. Diese Tatsache hängt damit zusammen, dass es für $m < 0$ keine Hyperfläche $r = 2m$ gibt.

Wenn $m > 0$ heisst die Hyperfläche $r = 2m$ Ereignishorizont. Eine kausale Kurve die im Bereich $r < 2m$ anfängt kann niemals das Aussengebiet $r > 2m$ erreichen. Der Bereich $r \leq 2m$ heisst schwarzes Loch und die eben erwähnte mathematische Tatsache hat die physikalische Interpretation dass kein Teilchen und kein Beobachter aus dem schwarzen Loch entkommen kann. Der Ereignishorizont ist eine Grenze die nur in einer Richtung überquert werden kann, nämlich von aussen nach innen. Er schützt das Aussengebiet von irgendwelchen Einflüssen der Singularität bei $r = 0$. Dieser Umstand heisst manchmal kosmiache Zensur. Das Gegenteil davon, eine Singularität die aus der Ferne gesehen werden kann heisst nackte Singularität.

Die Schwarzschild-Lösung ist asymptotisch flach, hat aber kein reguläres Zentrum. Physikalisch handelt es sich um ein ewiges schwarzes Loch das immer da gewesen ist. Physikalisch interessanter ist eine Situation in der ein schwarzes Loch dynamisch entsteht. In kugelsymmetrischen Vakuumlösungen gibt es keine Dynamik. Wir haben gesehen dass nach einer geeigneten Wahl der Koordinaten die metrischen Komponenten zeitunabhängig sind. Eine invariante Art dies auszudrücken ist zu sagen dass es eine Schar von Isometrien gibt mit zeitartigen Bahnen (Translationen in t). Eine Raumzeit mit dieser Eigenschaft heisst statisch. Die Aussage dass jede kugelsymmetrische Vakuumraumzeit statisch ist heisst Theorem von Birkhoff. Um die Entstehung eines schwarzen Lochs aus einer anfänglich regulären Konfiguration zu beschreiben müssen wir Raumzeiten benutzen die nicht statisch sind. Wenn wir im Rahmen der kugelsymmetrischen Raumzeiten bleiben wollen dann ist es notwendig, Materie irgendeiner Art einzuführen. Das bekannteste Modell für die Entstehung eines schwarzen Lochs ist die Lösung von Oppenheimer und Snyder. In dem Fall ist die Materie Staub.

Die Lösung von Oppenheimer und Snyder ist die Quelle vieler Ideen über den Gravitationskollaps und die Entstehung von schwarzen Löchern. Sobald man aber die sehr speziellen Annahmen dieses Modells fallen lässt stellt sich heraus dass Staub pathologische Eigenschaften hat. Deshalb ist es besser für die Untersuchung von Gravitationskollaps im allgemeinen, ein besseres Materiemodell zu wählen. Die zwei Möglichkeiten die am meisten untersucht worden sind, sind das lineare Skalarfeld und stossfreie Materie. Hier wird erklärt, was wir im Falle der stossfreien Materie wissen.

Ein allgemeines Bild von den Ereignissen im Gravitationskollaps von stossfreier Materie kann man durch numerische Untersuchungen erhalten. Für kleine Anfangsdaten läuft die Materie auseinander. Für grosse Anfangsdaten wird oft ein schwarzes Loch gebildet. Es ist schwer, diese Eigenschaften durch strenge Beweise zu bestätigen. Zumindest ist der Fall von kleinen Anfangsdaten analytisch behandelt worden [8].

Der Beweis der globalen Existenz für kleine Anfangsdaten für das kugelsymmetrische Einstein-Vlasov-System beruht auf der Tatsache das nach einer langen Zeit die Geodäten in den gegebenen Koordinaten fast Geraden sind. Da Geraden einfacher aussehen in kartesischen Koordinaten als in Polarkoordinaten ist es hilfreich, die Vlasov-Gleichung in kartesischen Koordinaten zu schreiben. Die kartesischen Koordinaten werden als Funktionen der Polarkoordinaten durch die gleichen Beziehungen beschrieben wie im Euklidischen Raum, d.h. $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$. In diesen neuen Koordinaten haben wir $g_{ab} = \delta_{ab} + (e^{2\lambda} - 1)x_a x_b / r^2$. Die Vlasov-Gleichung ist

$$\partial_t f + \frac{p^a}{p^0}\partial_{x^a} f - \frac{1}{p^0}\left[e^{2(\mu-\lambda)}\mu'(p^0)^2 + 2\dot{\lambda}\frac{x \cdot p}{r}p^0\right. \tag{107}$$

$$\left. + \lambda'\left(\frac{x \cdot p}{r}\right)^2 + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{r}\left(|p|^2 - \left(\frac{x \cdot p}{r}\right)^2\right)\right]\frac{x^a}{r}\partial_{p^a} f = 0 \tag{108}$$

Es stellt sich als nützlich heraus, die Vlasov-Gleichung bezüglich der Komponenten v^α in einer orthonormalen Basis anstatt der Komponenten p^α in einer Koordinatenbasis. Die Transformation der räumlichen Komponenten wird folgendermassen gegeben.

$$v^a = p^a + (e^{-\lambda} - 1)\frac{x \cdot p}{r}\frac{x^a}{r} \tag{109}$$

Wenn wir kugelsymmetrische Lösungen des Einstein-Vlasov-Ssystems betrachten wird verlangt dass die Verteilungsfunktion kugelsymmetrisch ist. Dies bedeutet dass $f(t, Ax, Av) = f(t, x, v)$ für jede orthogonale Matrix A. Es impliziert dass f folgende Bedingung erfüllt:

$$(r^2 v - (x \cdot v)x)\partial_x f = (|v|^2 x - (x \cdot v)v)\partial_v f \tag{110}$$

Wenn man in der Vlasov-Gleichung p^α durch v^α ersetzt und (110) benutzt folgt dass die Vlasov-Gleichung mit der einfacheren Gleichung

$$\partial_t f + e^{\mu-\lambda} \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}} \cdot \partial_x f - \left(\dot{\lambda} \frac{x \cdot v}{r} + e^{\mu-\lambda} \mu' \sqrt{1+|v|^2}\right) \frac{x}{r} \cdot \partial_v f = 0 \tag{111}$$

äquivalent ist. Für die Einstein-Gleichungen werden weiterhin Polarkoordinaten verwendet. Die Verwendung von Komponenten in einer orthonormalen Basis führt dazu dass die Ausdrücke für die Komponenten des Energieimpulstensors besonders einfach werden. Sie sind

$$\rho(t, x) = \int \sqrt{1+|v|^2} f(t, x, v) dv \tag{112}$$

$$p(t, x) = \int \left(\frac{x \cdot v}{r}\right)^2 f(t, x, v) \frac{dv}{\sqrt{1+|v|^2}} \tag{113}$$

$$j(t, x) = \int \frac{x \cdot v}{r} f(t, x, v) dv \tag{114}$$

$$q(t, x) = \int \left|\frac{x \times v}{r}\right|^2 f(t, x, v) \frac{dv}{\sqrt{1+|v|^2}} \tag{115}$$

Jetzt haben wir das ganze Einstein-Vlasov-System in einer Form die geeignet ist, um einen globalen Existenzsatz zu beweisen. Der Beweis ist zu lang und kompliziert um ihn hier erklären zu können. Wir geben einfach das Ergebnis an.

Theorem Sei $f_0(x, v)$ eine nichtnegative Funktion der Klasse C^1 mit kompaktem Träger die kugelsymmetrisch ist. Dann existiert eine eindeutige lokale Lösung $f(t, x, v)$ des Einstein-Vlasov-Systems mit $f(0, x, v) = f_0(x, v)$. Wenn f_0 hinreichend klein ist dann existiert die Lösung global in t, die Raumzeit ist geodätisch vollständig und die Komponenten des Riemanntensors konvergieren gleichmässig gegen Null für $t \to \infty$.

Es bleibt zu erklären was 'hinreichend klein' bedeutet. Zum Beispiel reicht es anzunehmen, dass mit einer festen Wahl des Trägers von f_0 das Maximum von f_0 hinreichend klein ist.

Vor kurzem ist es gelungen, Theoreme über das Langzeitverhalten von Lösungen zu beweisen die Anfangsdaten entsprechen die nicht klein sind. Der erste Fall betrifft Situationen in denen es eine grosse Menge stossfreie Materie gibt und alle Teilchen sich am Anfang mit hinreichend grosser Geschwindigkeit nach aussen bewegen [1]. Unter geeigneten technischen Bedingungen wird gezeigt, dass die Lösung global in der Zukunft existiert, mit einer Asympotik die dem Fall kleiner

Daten ähnlich ist. Der zweite Fall betrifft einen Ring stossfreier Materie in dem alle Teilchen sich am Anfang mit hinreichend grosser Geschwindigkeit nach innen bewegen. Unter geeigneten technischen Bedingungen wird gezeigt, dass ein schwarzes Loch entsteht bevor der Ring das Zentrum erreicht. Zum Vergleich darf erwähnt werden, dass inzwischen ein Theorem über die Entstehung von schwarzen Löchern im Vakuum von Christodoulou bewiesen wurde [3]. Selbstverständlich, angesichts des Birkhoff-Theorems, sind diese Lösungen nicht kugelsymmetrisch.

7.2 Der kosmologische Fall

Dieser Abschnitt befasst sich mit kugelsymmetrischen Raumzeiten die Randbedingungen erfüllen die anders sind als die die wir bisher betrachtet haben. Sie sind so, dass sie eine kompakte Cauchyhyperfläche besitzen, d.h. sie sind räumlich kompakt. Die verwandte Klasse der Raumzeiten mit ebener Symmetrie wird auch behandelt. Diese Lösingen der Einsteingleichungen können als kosmologische Modelle interpretiert werden. In geeigneten Koordinaten hat die Metrik die Form

$$-e^{2\mu(t,r)}dt^2 + e^{2\lambda(t,r)}dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{116}$$

Es gibt eine grosse Ähnlichkeit mit (100) mit dem Unterschied dass wir anstatt einer Flächenradius eine Zeitkoordinate verwenden die durch die Oberfläche der Gruppenbahnen definiert wird. Wie im anderen Fall ist die Metrik invariant unter Rotationen in den Winkelkoordinaten und ist deshalb kugelsymmetrisch, Es wird angenommen dass die Koordinate r periodisch ist. Die Metrik mit ebener Symmetrie ist

$$-e^{2\mu(t,r)}dt^2 + e^{2\lambda(t,r)}dr^2 + t^2(d\theta^2 + d\phi^2) \tag{117}$$

mit r, θ and ϕ periodisch. Die räumliche Mannigfaltigkeit ist ein dreidimensionaler Torus. Translationen in θ und ϕ sind Isometrien. Auf der universellen Überlagerung sind Rotationen im (θ, ϕ)-Raum auch Isometrien. Deshalb hat die Raumzeit lokale Symmetrien die mit denen der euklidischen Ebene übereinstimmen. Diese Tatsache führt auf den Namen ebene Symmetrie. Um es zu erleichtern, gewisse Formeln zu schreiben führen wir einen Parameter k ein der den Wert Eins hat für Kugelsymmetrie und den Wert Null für ebene Symmetrie. Die Raumzeiten mit Kugelsymmetrie oder ebener Symmetrie in denen die Funktionen μ und λ nicht von r abhängen sind räumlich homogen. Eine weitere Spezialisierung bekommt man indem man im Fall der ebenen Symmetrie $\lambda = \log t$ setzt. Man bekommt ein FLRW-Modell, ausgedrückt in einer Zeitkoordinate die anders ist als die die wir bisher gesehen haben. Deshalb sind die kosmologischen Modelle mit ebener Symmetrie Verallgemeinerungen der flachen FLRW-Modelle die weder homogen noch isotrop sind. Die Modelle dieser Klasse die homogen sind heisesn Modelle vom Bianchityp I. Die homogenen kugelsymmetrischen Modelle heissen Kantowski-Sachs-Modelle.

Die nichtverschwindenden Komponenten des Energieimpulstensors sind wie im letzten Abschnitt. Wie dort wird eine orthonormale Basis eingführt die den gegeben Koordinaten angepasst ist und es werden Grössen ρ, j, p and q definiert. Die Einsteingleichungen haben die Form

$$\begin{aligned} e^{-2\mu}(2t\dot{\lambda}+1)+k &= 8\pi t^2\rho & (118)\\ e^{-2\mu}(2t\dot{\mu}-1)-k &= 8\pi t^2 p & (119)\\ \mu' &= -4\pi t e^{\lambda+\mu} j & (120)\\ e^{-2\lambda}(\mu''+(\mu'-\lambda')\mu')-e^{-2\mu}(\ddot{\lambda}+(\dot{\lambda}+1/t)(\dot{\lambda}-\dot{\mu})) &= 4\pi q & (121)\end{aligned}$$

Betrachten wir den Vakuumfall. Dann zeigt eine der Feldgleichungen dass μ nur von t abhängt. Es folgt dass λ die Summe ist einer Funktion von r und einer Funktion von t. Durch eine Transformation von r kann man die r-Abhängigkeit von λ eliminieren. Dies bedeutet dass die Vakuumlösungen mit Kugelsymmetrie oder ebener Symmetrie sehr einfach sind. Die physikalische Interpretation dieser Tatsache ist dass diese Symmetrien mit der Anwesenheit von Gravitationswellen nicht verträglich sind. Eine andere Feldgleichung zeigt dass $d/dt(te^{-2\mu(t)})=-k$. Deshalb gilt $e^{2\mu(t)}=(k+C/t)^{-1}$ für eine Konstante C. Im Fall $k=1$ können wir $C=-2m$ schreiben und dann gilt $e^{2\mu(t)}=(1-2m/t)^{-1}$. Die noch verbleibende Gleichung kann man integrieren mit dem Ergebnis $e^{2\lambda}=1-2m/t$. Wir sehen dass diese Lösung nichts anderes ist als ein Teil der Schwarzschildlösung mit t und r vertauscht in der Schreibweise. Die Lösung ist für $t\in(0,2m)$ definiert; eine nichttriviale Lösung erhält man nur dann wenn $m>0$. Die Lösung hat eine Anfangssingularität bei $t=0$ und existiert nur endlich lange in der Zukunft. Was passiert für $t\to 2m$? Es handelt sich um eine Koordinatensingularität. Dort endet die grösste global hyperbolische Raumzeit die $t=$Konst. als Cauchyhyperfläche hat. Es ist aber möglich, die Raumzeit weiter fortzusetzen. Die Hyperfläche $t=2m$ auf der die globale Hyperbolizität zusammenbricht heisst Cauchyhorizont. Als nächstes betrachten wir den Fall mit ebener Symmetrie. In dem Fall ist $e^{2\mu(t)}=Ct$. Indem man die Zeitkoordinate reskaliert kann man annehmen dass $C=1$. Es folgt dass $\mu=\frac{1}{2}\log t$. Die letzte Feldgleichung liefert $\lambda=-\frac{1}{2}\log t$. Die Metrik ist

$$-tdt^2+t^{-1}dr^2+t^2(d\theta^2+d\phi^2) \tag{122}$$

Mit $\tau=t^{3/2}$ bekommt man die Metrik

$$-\frac{4}{9}d\tau^2+\tau^{-2/3}dr^2+\tau^{4/3}(d\theta^2+d\phi^2) \tag{123}$$

Eine konstante Reskalierung der Koordinaten zeigt dass es sich um die Kasnerlösung mit Kasnerexponenten $(2/3,2/3,-1/3)$ handelt.

Jetzt werden kosmologische Raumzeiten mit Kugelsymmetrie oder ebener Symmetrie und Materie betrachtet. Insbesondere wird der Fall von stossfreier Materie betrachtet. Die Vlasov-Gleichung kann in einer orthonormalen Basis in der expliziten Form

$$\partial_t f+\frac{e^{\mu-\lambda}v^1}{(1+|v|^2)^2}\partial_r f-(\dot{\lambda}+e^{\mu-\lambda}\mu'(1+|v|^2)^{1/2}\partial_{v^1}f=0 \tag{124}$$

geschrieben werden. Die globalen Eigenschaften von Raumzeiten dieser Art wurden in [7] untersucht.

Was für globale Eigneschaften von Lösungen sind von Interesse? Erstens gibt es die Frage auf welchem Zeitintervall Lösungen der Gleichungen existieren. Die Gleichungen werden singulär für $t \to 0$ und deshalb ist das maximale mögliche Existenzintervall $(0, \infty)$. Im kugelsymmetrichen Fall können diese Lösungen wieder kollabieren und die Oberfläche der Gruppenbahnen ist keine gute Zeitkoordinate. Von diesem Standpunkt aus gesehen ist der Fall ebener Symmetrie günstiger und in dem Fall gibt es einen globalen Existenzsatz für Lösungen des Einstein-Vlasov-Systems mit der Oberfläche der Gruppenbahnen als Zeitkoordinate (global auf dem Intervall $(0, \infty)$). Eine interessante offene Frage ist ob diese Raumzeiten geodätisch vollständig sind. Es scheint schwer, diese Frage zu beantworten. Gibt es ein physikalisches Phänomen hinter dieser mathematischen Schwierigkeit? Ein möglichger Kandidat für ein solches Phänomen ist die Jeans-Instabilität. Diese kommt vor in der Analyse von linearisierten Störungen eines flachen FLRW-Modells. Man findet dass der Dichtekontrast $\delta\rho/\rho$ wachsen kann. Dies ist ein fundamentales Element in der üblichen Beschreibung der Entstehung von Galaxien. Leider ist die Frage mathematisch wenig verstanden. In Modellen mit ebener Symmetrie und $\Lambda > 0$ kann man geodätische Vollständigkeit in der Zukunft beweisen. Das inflationäres Verhalten des Modells vereinfacht die Mathematik.

Eine andere interessante Frage ist die nach der Natur der Anfangssingularität bei $t = 0$ in diesen Modellen (angenommen dass keine Singularität entsteht bevor $t = 0$ erreicht wird). Diese Frage ist nicht vollständig verstanden worden aber Rein [7] hat einige Ergebnisse für eine grosse Klasse (eine offene Menge) von Lösungen erhalten. Für diese Lösungen (mit Kugelsymmetrie oder ebener Symmetrie) existiert die Lösung bis $t = 0$. Die verallgemeinerten Kasner-Exponenten konvergieren gegen die Werte $(2/3, 2/3, -1/3)$. Diese Exponenten erfüllen die zweite Kasnerrelation, was einer Vakuumlösung entspricht. In gewissem Sinne wird die gegebene Lösung durch eine Vakuumlösung in der Nähe der Singularität approximiert. Dies bedeutet nicht, dass die Energiedichte in der Nähe der Singularität klein ist. In Wirklichkeit divergiert sie. Es ist nur so dass die anderen Terme in den Einsteingleichungen schneller wachsen als die Materieterme und dominieren die Dynamik in der Nähe der Singularität. Es gibt eine Vermutung von Belinskii, Khalatnikov und Lifschitz (BKL) dass diese Art Dominanz der Vakuumterme eine typische Eigenschaft von Raumzeitsingularitäten ist. Diese Raumzeiten sind auch so, dass in der Nähe ihrer Singularitäten die inhomogenen Raumzeiten wie homogene Raumzeiten aussehen die von den räumlichen Koordinaten als Parameter abhängen. Es ist als ob die Evolution in verschiedenen räumlichen Punkten unabhängig würde. Diese Entkopplung ist ein anderer Aspekt des Bildes von BKL. Die Gültigkeit von diesem Bild im allgemeinen ist noch Gegenstand intensiver Untersuchungen. In den von Rein analysierten Lösungen konnte er zeigen dass der Kretschmannskalar für t gegen Null explodiert so dass es sich um eine echte geometrische Singularität handelt und nicht nur um einen Koordinateneffekt.

References

[1] Andréasson, H., Kunze, M. und Rein, G. 2006 Global existence for the spherically symmetric Einstein–Vlasov system with outgoing matter. Preprint gr-qc/0611115.

[2] Andréasson, H., Kunze, M. und Rein, G. 2007 The formation of black holes in spherically symmetric gravitational collapse. Preprint arXiv:0706.3787.

[3] Christodoulou, D. 2008 The formation of black holes in general relativity. Preprint arXiv:0805.3880.

[4] Jurke, T. 2003 On future asymptotics of polarized Gowdy T^3-models. Class. Quantum Grav. 20, 173-192.

[5] Kichenassamy, S. und Rendall, A. D. 1998 Analytic description of singularities in Gowdy spacetimes. Class. Quantum Grav. 15, 1339-1355.

[6] Moncrief, V., 1981 Global properties of Gowdy spacetimes with $T^3 \times R$ topology. Ann. Phys (NY) 132, 87-107.

[7] Rein, G. 1996 Cosmological solutions of the Vlasov–Einstein system with spherical, plane, or hyperbolic symmetry. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 119, 739–762.

[8] Rein, G. und Rendall, A. D. 1992 Global existence of solutions of the spherically symetric Vlasov-Einstein system with small initial data. Commun. Math. Phys. 150, 561-583.

[9] Rendall, A. D. 2000 Fuchsian analysis of singularities in Gowdy spacetimes beyond analyticity. Class. Quantum Grav. 17, 3305-3316.

[10] Ringström, H. 2004 On a wave map equation arising in general relativity. Commun. Pure Appl. Math. 57, 657-703.

[11] Ringström, H. 2003 Strong cosmic censorship in T^3-Gowdy spacetimes. Ann. Math. (to appear)

[12] Wald, R. M. 1984 General relativity. University of Chicago Press, Chicago.

[13] Wasserman, R. H. 1992 Tensors and manifolds. Oxford University Press, Oxford.