Vorbereitung auf die Allgemeine Relativitätstheorie

Grundbegriffe der klassischen Mechanik und Gravitationstheorie

Jürgen Ehlers

Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik

Albert-Einstein-Institut, Golm

Vorbemerkung

Die folgende kurze, elementare und auf die Grundbegriffe beschränkte Darstellung ist als Vorbereitung auf die Allgemeine Relativitätstheorie gedacht. Sie unterscheidet sich von traditionellen Lehrbuchdarstellungen durch die Bemühung, die Bedeutung der Raumzeitgeometrie für die Begriffsbildungen der Mechanik und die Sonderrolle der Gravitation innerhalb der allgemeinen Mechanik hervorzuheben. Bei der Einführung der Begriffe schwere Masse, träge Masse, Kraft, Inertialsystem, abgeschlossenes System war ich bestrebt, logisch-methodische Zirkel zu vermeiden. Außerdem habe ich die wichtigsten experimentellen Tatsachen über Schwere und Trägheit, soweit sie sich im Rahmen der Newtonschen Theorie beschreiben lassen, zusammengestellt. Ergänzungen und Kritik sind erwünscht.

1 Die Galilei-Newtonsche Raumzeitstruktur

Für die Menge M der Raumzeitpunkte $\equiv$ Ereignisse wird in der vorrelativistischen klassischen Physik folgende Struktur angenommen:

1. Es gibt eine absolute Zeit $t : M \to \mathbb{R}$, die bis auf affine Transformationen $t' = at + b$ festgelegt ist.
   Durch t ist die Gleichzeitigkeit von Ereignissen sowie die Dauer von Vorgängen bestimmt. Es gibt keine bevorzugten Augenblicke (durch b ausgedrückt); eine Zeitskala ist durch Nullpunkt und Zeiteinheit festgelegt. Nach Annahme einer Zeitorientierung ($\Rightarrow a > 0$) und einer Zeiteinheit setzen wir künftig $a = 1$. In 1) ist die Annahme enthalten, dass Uhren konstruiert werden können, die bis auf zufällige Fehler die absolute Zeit anzeigen, unabängig von ihrem Bewegungszustand und von Umwelteinflüssen.

2. Für jedes t ist die Menge $\Re_t$ der Ereignisse zur Zeit t ein euklidischer 3-Raum mit Abstand $d_t : \Re_t \times \Re_t \to \mathbb{R}^+$.
   Abstände können - jedenfalls im Kleinen - durch (ideale) Maßstäbe oder Meßbänder bestimmt werden nach Festlegung einer Längeneinheit. In 2) sind Isotropie und Homogenität von $\Re_t$ enthalten.

3. Wenn (ideale) Maßstäbe zu einer Zeit gleich lang sind, so sind sie es auch zu jeder anderen Zeit, unabhängig von ihren Bewegungen. Wir setzen deshalb $d_t = d$. Die Funktion d heißt absoluter Abstand.

Aus 1) - 3) folgt, dass t zusammen mit orthonormalen Raumkoordinaten x^a in den $\Re_t$ bezüglich d ein globales Koordinatensystem (t, x^a) auf M definiert.

Je zwei solche Koordinatensysteme sind verknüpft durch

$$\begin{cases} t' = t + \tau \\ x^{a'} = D^{a'}{}_b(t)(x^b - d^b(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Darin bezeichnet τ eine (konstante) Zeitverschiebung, $d^a(t)$ eine zeitabhängige Verschiebung des Koordinatenursprungs in $\Re_t$ und $D^{a'}{}_b(t)$ eine zeitabhängige Drehung, $D(t) \in S0(3)$, wenn wir eine räumliche Orientierung ein für allemal festlegen ("rechtshändige" Koordinaten).

Jedes Koordinatensystem (t, x^a) enstpricht einem starren Bezugssystem $\mathcal{B}$, dessen Punkte durch konstante Koordinatenwerte x^a gegeben sind. Ein $\mathcal{B}$ kann "an einen starren Körper angeheftet" sein (Erde, Satellit ...). $\vec{x} = (x^a)$ ist der Ortsvektor eines Punktes bezüglich $\mathcal{B}$. Aus (1) ergibt sich für die Ortsvektoren eines Punktes relativ zu $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{d} \qquad (\vec{d} = (d^a) \tag{2}$$

Es ist zweckmäßig die Transformationen (1) einzuschränken durch die idealisierende Annahme, dass die Funktionen $D^{a'}{}_b(t), d^b(t)$ glatt (unendlich oft differenzierbar, C^∞) sind. Damit wird M zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, diffeomorph mit $\mathbb{R}^4$ und ausgestattet mit bevorzugten globalen Koordinatensystemen.
Die Gruppe $\mathcal{K}$ der Transformationen (1) beschreibt die Symmetrie (Automorphismen) von (M, t, d) analog zu der Bewegungsgruppe des euklidischen Raumes, wir nennen sie die kinematische Gruppe.

In M kann man von raumartigen Geraden und raumartigen Vektoren (3-Vektoren) nämlich in den $\Re_t$ reden, aber andere Geraden sind in M nicht definiert.

Aus (1) folgt als Transformationsgesetz für die Komponenten raumartiger Vektoren $\vec{r}$:

$$r^{a'} = D^{a'}{}_b(t) r^b. \tag{3}$$

Die Zeitableitung einer Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ bezüglich $\mathcal{B}$ (!) ist definiert durch

$$\frac{d}{dt}\vec{r} := (\dot{r}^a),$$

d.h. die Basisvektoren des räumlichen Koordinatensystems von $\mathcal{B}$ werden definitionsgemäß als bezüglich $\mathcal{B}$ konstant betrachtet, entsprechend für $\mathcal{B}'$. Aus (3) folgt dann

$$\frac{d'}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{4}$$

worin der (axiale) Vektor der Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{B}'$ relativ zu $\mathcal{B}$ die Komponenten

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{abc}\omega_{bc}, \qquad \omega_{bc} := \sum_{d'=1}^{3} D^{d'}{}_b \dot{D}^{d'}{}_c \tag{5}$$

bezüglich $\mathcal{B}$ hat. η ist der Volumentensor der euklidischen Metrik; also $\omega^1 = \omega_{23}$ etc.; in Matrixschreibweise $\omega = D^T \cdot \dot{D}$.

Künftig wird der übergesetzte Punkt als Zeitableitung in **dem** Bezugssystem, auf das sich die betreffende Größe bezieht, verwendet. In Zweifelsfällen schreiben wir $\frac{d}{dt}$ bzw. $\frac{d'}{dt}$.

2 Kinematik, Punktbewegungen

Die Bewegung eines Punktkörpers wird in M durch eine zeitartige, d.h. zu den $\Re_t$ transversale Kurve - Weltlinie - beschrieben, relativ zu einem Bezugssystem $\mathcal{B}$ also durch $\vec{x}(t) = (x^a(t))$. Geschwindigkeit und Beschleunigung relativ zu $\mathcal{B}$ sind durch $\vec{v} = \dot{\vec{x}}, \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$ definiert.

Aus (2) und (4) folgen die Transformationsregeln für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, in denen die "gestrichenen" Größen auf $\mathcal{B}'$, die ungestrichenen auf $\mathcal{B}$ beziehen.

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} - \vec{\omega} \times \vec{x}', \tag{6}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{b} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

In diesen Formeln bedeutet $\vec{u} = \dot{\vec{d}}$ die Geschwindigkeit, $\vec{b} = \dot{\vec{u}}$ die Beschleunigung des "gestrichenen" Nullpunktes bezüglich $\mathcal{B}$. Beweis von (6): Wende die Operatorgleichung

$$\frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt} - \omega \times$$

auf die Vektorgleichung (2) an, worin $\vec{x}(t), \vec{x'}(t)$ die Bewegung eines Teilchens bezüglich $\mathcal{B}$ bzw. bezüglich $\mathcal{B}'$ beschreiben; das ergibt die erste der Gleichungen (6). Nochmalige Anwendung der Operatorgleichung ergibt die zweite Gleichung.

Es ist zu beachten, dass

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v} - \vec{u}$$

die Geschwindigkeit des Teilchens relativ zum Nullpunkt von $\mathcal{B}'$, beurteilt in $\mathcal{B}$, bedeutet, während

$$\vec{v'} = \frac{d'}{dt}\vec{x'},$$

die Geschwindigkeit des Teilchens beurteilt in $\mathcal{B}'$ angibt.
Aus (6) folgt der für die Dynamik wichtige
Satz: Alle bezüglich $\mathcal{B}$ gleichförmig-geradlinigen Bewegungen sind genau dann auch bezüglich $\mathcal{B}'$ gleichförmig-geradlinig, wenn $\mathcal{B}'$ sich drehungsfrei mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu $\mathcal{B}$ bewegt, also - siehe (6) - für $\vec{\omega} = 0$, $\vec{b} = 0$ oder damit gleichwertig - siehe (1) - für $D = ({D^{a'}}_b) = const., \vec{d} = \vec{d}(0) + t\vec{u}(0)$. Dieselben Transformationen sind auch dadurch gekennzeichnet, dass für alle Punktbewegungen die Beschleunigungen invariant sind, also für alle $\vec{x}(t)$ gilt $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$.

Die durch diesen Satz gekennzeichneten Transformationen bilden eine Untergruppe $\mathcal{G}$ der kinematischen Gruppe $\mathcal{K}$, die Galileigruppe. Im Unterschied zu $\Re$ ist $\mathcal{G}$ eine endlichdimensionale Liegruppe, $dim\mathcal{G} = 10$.

3 Gravitation in abgeschlossenen Systemen von n als Punkte dargestellten Körpern

Die Bewegungsgleichungen für ein abgeschlossenes System von n gegeneinander schweren Punktkörpern sind

$$\ddot{\vec{x}}_j = \sum_{k \neq j} M_k \frac{\vec{x_k} - \vec{x_j}}{|\vec{x_k} - \vec{x_j}|^3}. \qquad (7)$$

Darin sind die M_j positive, den Körpern zugeordnete Konstanten der Dimension L^3T^{-2}.

Genauer: Es wird angenommen, dass es zu jedem abgeschlossenen System von n Massenpunkten ein starres Bezugssystem $\mathcal{B}$ und n Konstanten M_j gibt, so dass die Bewegung des Systems relativ zu $\mathcal{B}$ den Gleichungen (7) genügt. Die M_j werden (hier) die schweren Massen der Körper genannt.

Die damit formulierte Dynamik war die erste über die Kinematik hinausgehende Theorie; sie stellt bekanntlich die Bewegungen im Sonnensystem, in Doppelsternen und ähnlichen Systemen sehr genau dar. (Die Darstellung eines Systems als "abgeschlossen" ist eine (nicht nur in diesem Fall) unvermeidliche Idealisierung, deren Berechtigung als Näherung für reale Systeme durch Einbettung in größere abgeschlossene Systeme plausibel gemacht werden kann, s.u.) Die Darstellung der Körper (z.B. Planeten) durch Punkte

wird in Abschnitt (9) verfeinert.
Aus (7) folgt

$$\sum_{j=1}^{n} M_j \ddot{\vec{x}}_j = 0,$$

also bewegt sich der Massenmittelpunkt $(\sum M_j)^{-1} \cdot \sum M_k \ \vec{x}_k$ des Systems gleichförmig-geradlinig.

Wenn die Gleichungen (7) relativ zu $\mathcal{B}$ gelten, so auch relativ zu jedem mit $\mathcal{B}$ durch eine Galileitransformation verknüpften starren Bezugssystem $\mathcal{B}'$, insbesondere im Massenmittelpunktsystem, in dem $\sum M_j \vec{x}_j = 0$ ist. In einem starren Bezugssystem, das mit $\mathcal{B}$ durch eine beliebige Transformation (1) aus $\mathcal{K}$ verbunden ist, treten dagegen nach (6) in der Bewegungsgleichung zusätzliche, $\vec{b}(t)$ und $\vec{\omega}(b)$ enthaltende Terme auf. Die Bewegungsgleichungen (7) sondern also aus der Menge aller starren Bewegungssysteme eine Teilmenge aus, deren Elemente durch Galileitransformationen verknüpft sind; sie werden Inertialsysteme genannt. Da die Galileitransformationen affine Transformationen der Raumzeitkoordinaten sind, wird die Raumzeit also durch die dynamischen Gesetze (7) mit einer affinen Struktur versehen, deren nicht raumartige Geraden gleichförmig-geradlinige Bewegungen darstellen.

Durch (7)ist der Begriff Inertialsystem implizit definiert. Durch Anpassung einer Lösung von (7) an die beobachteten Relativbewegungen von Sonne und Planeten relativ zur Erde wird tatsächlich das Massenmittelpunkts-Intertialsystem des Planetensystems bestimmt. Es stellt sich dann heraus, dass die Richtungen, in denen Galaxien gesehen werden, relativ zu den Achsen dieses astronomischen Inertialsystems zeitlich konstant sind. (Diese Erfahrungstatsache folgt weder aus der Newtonschen Theorie noch aus der Allgemeinen Relativitätstheorie. Im Standardmodell der Kosmologie folgt sie aus der Annahme der Isotropie.)

Die Massen M sind durch (7) ebenfalls implizit definiert. Wenn die Relativbewegungen $\vec{x}_j(t) - \vec{x}_k(t)$ als durch Messungen bestimmbar angenommen werden, sind dadurch die M_j aus (7) bestimmbar. (Man gehe von (7) zu den Gleichungen für die Relativbewegung über; diese ergeben lineare Gleichungen für die M_j, die i.a. die M_j eindeutig bestimmen.) Als Beispiel für die erreichte Genauigkeit sei die schwere Masse der Sonne angegeben:

$$M_{\odot} = 1,32704(2) \cdot 10^{26} \ cm^3 s^{-2}.$$

Nebenbemerkung: Um konkrete Ereignisse relativ zu einem starren Bezugssystem zu lokalisieren, reichen Meßstäbe und Uhren außer in Labordimensionen nicht aus, sondern es wird Licht zu Hilfe genommen. Dabei wird zunächst - z.B. bei Einführungen in die Himmelsmechanik - stillschweigend unterstellt, dass Lichtstrahlen im Vakuum durch geradlinige Strecken in den $\Re_t$ dargestellt werden können, als ob die Lichtgeschwindigkeit unendlich wäre. (Beispiel: Keplers Bestimmung der Bahnen von Erde und Mars.) Berücksichtigung der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit verlangt Aberrationskorrekturen. Dabei taucht die Frage nach einem optisch bevorzugten Bezugssystem auf, was schließlich zur speziellen Relativitätstheorie und - bei Erkenntnis der Lichtablenkung in Schwerefeldern - zu allgemeinrelativistischen Korrekturen zur Lokalisierung von Raumzeitpunkten führt. Diese Bemerkung soll darauf hinweisen, dass die Himmelsmechanik als physikalische Theorie die Optik als Hilfstheorie (Meßtheorie) benötigt; sie erläutert auch einen Aspekt des berühmten, von Planck herrhrenden und von Einstein unterstützten Ausspruchs: "Die Theorie bestimmt, was meßbar ist."

Der formale Ausbau der auf (7) beruhenden Theorie soll hier nicht dargestellt werden: Einführung des Potentials, der Lagrangefunktion, der Hamiltonfunktion, der zehn Integrale etc.

4 Freier Fall, Führungsfeld

Gegeben sei ein abgeschlossenes System gravitierender Körper, z.B. das System der Sonne, ihrer Planeten und deren Monde; ihre Bewegungen $\vec{x}_j(t)$ genügen den Gleichungen (7). Unter einem Probekörper sei ein Körper verstanden, dessen schwere Masse M sehr viel kleiner ist als die Massen M_j der "schweren" Körper; $M \ll M_j$, z.B. ein Raumfahrzeug oder ein Stein. Fügen wir einen solchen zu dem System der schweren Körper hinzu, so gelten für das erweiterte System nach wie vor näherungsweise die Gleichungen (7), und zusätzlich gilt eine analoge Gleichung für die Bewegung $\vec{x}(t)$ des Probekörpers. In der Gleichung für $\vec{x}(t)$ kommt M nicht vor. Wir können deshalb den Probekörper als einen Körper der schweren Masse Null idealisieren. Dann gelten die Gleichungen (7) für alle Körper exakt, und für Probekörper gilt

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{g}(t, \vec{x}), \tag{8}$$

wobei $\vec{g}(t, \vec{x})$ durch die Bewegungen der schweren Körper bestimmt ist:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \text{wobei} \quad \phi(t, \vec{x}) = \sum_j \frac{-M_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j(t)|}. \tag{9}$$

ϕ wird Gravitationspotential des Systems der schweren Körper genannt. ϕ und $\vec{g}$ sind im ganzen Raum außerhalb der schweren Körper wohldefiniert (und C^∞).

Gleichung (8) besagt, daß die *Bewegungen von Probekörpern in einem "äußeren Gravitationsfeld" $\vec{g}$ von der Art der Probekörper unabhängig* und allein durch Anfangsbedingungen $\vec{x}(t_0), \vec{v}(t_0)$ bestimmt *sind.* (Dies gilt zunächst für die Punktkörper-Idealisierung; auf die Gestaltunabhängigkeit gehe ich in Abschnitt 9 ein.) Diese wichtige Feststellung wird oft Galilei zugeschrieben, war aber schon viel früher bemerkt worden, wobei die Probekörper bei Versuchen auf der Erde "klein" und "schwer" sein müssen, damit der Luftwiderstand keine merkliche Rolle spielt. Die Aussage wird oft als Universalität des freien Falls bezeichnet.

Die obige Beschreibung bezieht sich auf ein durch das System der schweren Körper gegebenes Inertialsystem $\mathcal{B}$. Denken wir an das Beispiel des Sonnensystems und an Wurfbewegungen auf der Erde, so werden wir die Probekörperbewegungen auf ein mit der rotierenden Erde verbundenes System $\mathcal{B}'$ beziehen. Dann wird aus (8) wegen (6)

$$\ddot{\vec{x}}'(t, \vec{x}') = \vec{g}'(t, \vec{x}') + 2\dot{\vec{x}}' \times \vec{\omega}'(t), \tag{10}$$

wo nun $\vec{\omega}'$ die Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{B}'$ relativ zu $\mathcal{B}$ also z.B. der Erde, bedeutet und $\vec{g}'$ als Schwerebeschleunigung in $\mathcal{B}$ bezeichnet wird.

Gleichung (10) ist wichtig, weil sie ermöglicht, lokal durch Beobachtung von Probekörperbewegungen relativ zu einem beliebig bewegten "kleinen", starren Bezugssystem das Feld $(\vec{g}', \vec{\omega}')$ zu bestimmen (und (10) zu überprüfen), ohne dass etwas über die "das Feld erzeugenden" schweren Körper oder über Inertialsysteme bekannt zu sein braucht.

Geht man von einem starren Bezugssystem $\mathcal{B}'$ zu einem anderen, $\mathcal{B}''$, über, so transformiert sich das Führungsfeld $(\vec{g}, \vec{\omega})$ folgendermaßen:

$$\vec{g}'' = \vec{g}' - \vec{b} - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{x}'' - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}'') + 2(\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{x}'') \times \vec{\omega}', \tag{11}$$

$$\vec{\omega}'' = \vec{\Omega} + \vec{\omega}'.$$

($\vec{u}$ Geschwindigkeit, $\vec{b}$ Beschleunigung des $\mathcal{B}''$-Nullpunkts relativ zu $\mathcal{B}'$, $\vec{\Omega}$ Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{B}''$ relativ $\mathcal{B}'$.)

Wie man an (11) sieht und wie wir schon vorher wußten, kann man durch Übergang von $\mathcal{B}'$ zu einem geeigneten $\mathcal{B}''$ die Winkelgeschwindigkeit "wegtransformieren", nämlich durch Wahl von $\vec{\Omega} = -\vec{\omega}'$. Im Gegensatz dazu kann das $\vec{g}$-Feld i.a. nicht in einem ganzen Bereich wegtransformiert werden. Wohl aber gilt: *Zu jedem Probekörper läßt sich ein starres Bezugssystem einführen, für das $\vec{\omega} = 0$ ist und $\vec{g}$ am Ursprung Null ist, $\vec{g}(t, 0) = 0$.* Ein solches an eine Probekörperbewegung (auch ohne Vorhandensein eines Probekörpers) angepaßtes Bezugssystem wird ein lokales Inertialsystem genannt. Ändert sich $\vec{g}$ räumlich nur langsam, so gilt nahe dem Ursprung eines solchen Systems näherungsweise $\ddot{\vec{x}} = 0$, also das Trägheitsgesetz. Dies trifft z.B. zu auf eine im Erdfeld fallende Kabine, womit z.B. im Bremer Fallturm experimentiert wird, sowie auf ein nicht rotierendes, "schwereloses" Raumfahrzeug.

Wie bereits bemerkt, können $\vec{g}$ und $\vec{\omega}$ relativ zu einem beliebigen starren Bezugssystem lokal ermittelt werden, und die dynamische Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ kann durch Übergang zu einem "nichtrotierenden" Bezugssystem "wegtransformiert" werden; Man denke an Newtons Eimerversuch oder Foucaults Pendel, durch die die Winkelgeschwindigkeit der Erde ohne Betrachtung ferner Sterne bestimmbar ist. Das dann übrig bleibende Feld $\vec{g}$ kann aber nach (11) in einem endlich ausgedehnten Bereich i.a. nicht durch Übergang zu einem anderen nichtrotierenden System beseitigt werden; in diesem Sinn gibt es keine "unbeschleunigten" Bezugssysteme. Deswegen kann die Stärke des $\vec{g}$-Feldes in einem Raumzeitpunkt auch nicht durch eine vom Bezugsystem unabhängige skalare Größe charakterisiert werden. Bildet man aber

$$E_{ab} := g_{a,b} = -\partial_{ab}\phi, \tag{12}$$

so zeigt (1) mit $D = const.$ dass die E_{ab} sich wie die Komponenten eines (symmetrischen) räumlichen Tensors transformieren. Das Gezeitenfeld (12) ist also ein lokal bestimmbarer, von der Wahl des nichtrotierenden Bezugssystems unabhängiger Tensor, also ist der Skalar $\sum\limits_{a,b} (g_{a,b})^2$ ein invariantes Maß für die Stärke des Gezeitenfeldes. (In Tensorschreibweise mit der kontravarianten Raummetrik δ^{ab} ist dieser Skalar $\delta^{ac}\delta^{bd}g_{a,b}g_{c,d}$.) (Man erinnere sich daran, dass E_{ab} tatsächlich die Gezeiten hervorruft.)

In einem lokalen Inertialsystem gilt naäherungsweise das Trägheitsgesetz in einer Umgebung des Nullpunktes, in der $E_{ab}(t,0)x_b$ vernachlässigbar klein ist. Sieht man z.B. $10^{-6}g \sim 10^{-3}cms^{-2}$ als vernachlässigbar an, so hat ein lokales Inertialsystem nahe der Erdoberfläche die Ausdehnung von einigen Metern. Der Grund dafür, dass das Trägheitsgesetz nur näherungsweise für frei fallende Teilchen in einem lokalen Inertialsystem $\mathcal{B}$ gilt, ist die Nicht-Abschirmbarkeit der "Schwere" aller Körper ausserhalb $\mathcal{B}$.

Da das $\vec{g}$-Feld aufgrund lokal feststellbarer Eigenschaften nicht in einer vom Bezugssystem unabhängigen, objektiven Weise in ein Vektorfeld "Gravitationsfeldstärke" und ein "Trägheitsfeld" (Zentrifugal-, Coriolisfeld) zerlegt werden kann, habe ich dafür die von H. Weyl in die Allgemeine Relativitätstheorie eingeführte Beziehung Führungsfeld schon hier in der Newtonschen Theorie benutzt. (Das Transformationsgesetz (11) bedeutet, dass dies Feld mathematisch einen symmetrischen, linearen Zusammenhang auf der Raumzeit M definiert, analog zu der AR. Dies soll hier aber nicht explizit verwendet werden.)

Später, in Abschnitt 9 , wird beschrieben, wie $\vec{g}$ mit der Materie verknüpft ist; damit wird dann der Zusammenhang mit (7) hergestellt. Das gelingt aber nur für abgeschlossene Systeme, auf die sich auch (7) bezieht.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die lokalen Inertialsysteme, z.B. im Bereich des Planetensystems, relativ zueinander und zum globalen astronomischen Inertialsystem beschleunigt sind.

Die wichtige, als Ausgangspunkt für die Allgemeine Relativitätstheorie dienende Einsicht ist: *Lokale Inertialsysteme lassen sich überall aufgrund lokal physikalisch feststellbarer Sachverhalte ermitteln, globale Inertialsysteme aber nur unter Bezugnahme auf ein als abgeschlossen betrachtetes, ausgedehntes System.* Die Annahme globaler Inertialsysteme (oder des absoluten Raumes) als Grundbegriff der Mechanik ist deshalb schon früh als unbefriedigend beurteilt worden (Leibniz, Berkeley, später Mach). Dieser Mangel wurde erst durch die Allgemeine Relativitätstheorie beseitig. (Dieser prinzipiell wichtige Sachverhalt ändert natürlich nichts daran, dass z.B. ein irdisches Laborsystem für viele praktische Zwecke als ein Inertialsystem betrachtet werden kann.)

5 Träge Masse, Erhaltungssätze bei Stößen

Bisher war weder von "träger Masse" noch von "Kraft" die Rede, und dazu bestand auch kein Anlaß zur Beschreibung der betreffenden Erfahrungen.

Für kleine Körper, mit denen im Labor experimentiert werden kann, wird die träge Masse m eingeführt mit Hilfe des Erfahrungssatzes, daß bei Stößen zwischen den Geschwindigkeiten (unmittelbar) vor dem Stoß und denjenigen nach dem Stoß eine lineare Relation

$$\sum_{vor} m_j \vec{v}_j = \sum_{nach} m_e \vec{v}_e \tag{13}$$

besteht mit Koeffizienten m, die den Teilchen zugeordnet sind. Diese $m's$ sind bei geeignet gewählten Anfangsgeschwindigkeiten und Stoßvorgängen durch (13) bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Nach Wahl einer Einheit (Urkilogramm) sind dadurch die trägen Massen, denen eine von Länge und Zeit unabhängige physikalische Dimension M zugeschrieben wird, bestimmbar. Erfahrunsgemäß sind die Verhältnisse der m stets positiv; also sind es auch die Massenwerte selbst.

Der Impulserhaltungssatz (13) gilt in jedem starren Bezugssystem; also folgt wegen (6) aus (13) die Erhaltung der trägen Masse bei Stößen,

$$\sum_{vor} m_j = \sum_{nach} m_e. \tag{14}$$

Darin ist als Grenzfall die Additivität der Masse beim Zusammenfügen von Körpern enthalten.

Bemerkung: Um die Erhaltungssätze (13), (14) einzuführen, kann man auch statt (13) einen $\mathcal{K}$-invarianten Energieerhaltungssatz postulieren. Dann kann aus einfachen Annahmen über die Energiefunktion abgeleitet werden, daß die Energie die Form

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \vec{v}^{\,2} + U \tag{15}$$

haben muß mit zwei Funktionen m und U auf der Menge der "inneren Zustände" der Teilchen. $\mathcal{K}$- Invarianz liefert dann sofort die Sätze (13), (14) als Folgerungen der Energieerhaltung. (Ehlers, Rindler, Penrose, Am. Journ. Phys. 33, 995 (1965)). Postuliert man $E > 0$, so folgt $m > 0$. Definiert man elastische Stöße als solche, bei denen die inneren Zustände der Teilchen sich nicht ändern, so folgt für diese

$$\sum \frac{1}{2}\, m\, \vec{v}^{\,2} \text{ ist erhalten.} \tag{16}$$

6 Kräfte, Newtons Grundgesetz der Dynamik

Das in Abschnitt 4 betrachtete universelle Fallgesetz (8) gilt erfahrungsgemäss für die Mehrzahl kleiner Körper, die nicht von anderen Körpern berührt werden. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, die Existenz eines $\vec{g}$-Feldes allgemein - auch im Innern ausgedehnter Körper - anzunehmen. (Wie $\vec{g}$ dann zu berechnen ist in Verallgemeinerung von (9), wird in Abschnitt 9 besprochen.) Wenn die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$ eines Körpers relativ zu einem nichtrotierenden Bezugssystem von $\vec{g}$ abweicht, setzt man

$$m(\ddot{\vec{x}} - \vec{g}) = \vec{K} \tag{17}$$

und nennt $\vec{K}$ die auf den Körper wirkende Kraft. Da die Differenz zweier auf dasselbe Ereignis bezogenen Beschleunigungen bei Transformationen (6) mit $\vec{\omega} = o$ ein vom Bezugssystem unabhängiger "invarianter" Vektor und die träge Masse ein Skalar ist, ist die Kraft ein invarianter Vektor. (Kraftgesetze in der klassischen Punktmechanik (und deren Verallgemeinerungen auf die Kontinuum-Mechanik) sind sogar $\mathcal{K}$-invariant.)

Elementare Beispiele für Berührungskräfte sind Reibung und Auftrieb sowie elastische (Feder-)Kräfte.

Das wichtigste (und einzige fundamentale) Beispiel für den Kraftbegriff nach (17) ist die elektrostatische Kraft

$$\vec{K} = e\vec{E}$$

mit Ladung e und Feldstärke $\vec{E}$ (Elektrisch geladene Teilchen gehören nicht zu der Mehrheit der frei fallenden Teilchen und sind eben daran und an anderen Merkmalen erkennbar, wie die Experimentalphysik lehrt.) Die Abhängigkeit der Feldstärke von der Verteilung seiner "Quellen" ist bekanntlich $\mathcal{K}$-invariant, wie (17) verlangt.

(17) kann auch so ausgesprochen werden: Am Ursprung eines lokalen Inertialsystems gilt

$$m\ \ddot{\vec{x}} = \vec{K}. \tag{18}$$

Diese mit (17) äquivalente Aussage ist eine andere Form des zweiten Newtonschen Gesetzes.) Sie macht die Sonderrolle von Trägheit und Gravitation - linke Seite von (17) - deutlich. Bei bekanntem Kraftgesetz und bekanntem $\vec{g}$, etwa Federkraft im Labor, kann natürlich auch (17) zur Messung der trägen Masse dienen.

Man beachte, dass (17) eine lokal prüfbare Aussage ist, wenn das Kraftgesetz, das $\vec{K}$ durch Umgebungsparameter, Orte von Teilchen etc. ausdrückt, selbst lokal ist wie die oben erwähnten Beispiele.

Es ist üblich, (17) umzuschreiben in

$$m\ \ddot{\vec{x}} = \vec{K} + m\ \vec{g} \tag{19}$$

und $m\ \vec{g}$ die Gravitationskraft oder das Gewicht des betr. Körpers zu nennen. Dann muß man sich auf - nur global für abgeschlossene Systeme (siehe Abschnitt 3) definierbare - Inertialsysteme beziehen oder in Kauf nehmen, dass das Gewicht im Gegensatz zu $\vec{K}$ vom Bezugssystem abhängt - siehe (8).

7 Träge und schwere Massen. Die Gravitationskonstante

Aus (7) folgen für abgeschlossene, gravitierende Systeme Erhaltungssätze für die Größen

$$\sum_j M_j, \qquad \sum_j M_j\vec{v}_j$$
$$\sum_j \frac{1}{2}M_j\vec{v}_j^2 - \sum_{j<k} \frac{M_jM_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|}.$$

Bei Stoßprozessen gelten nach Abschnitt 1.5 Erhaltungssätze für

$$\sum m_j \ , \quad \sum m_j\vec{v}_j, \quad \sum_j (\frac{1}{2}m_j\vec{v}\ _j^{\,2} + U_j).$$

Die zuerst genannten Sätze haben sich in der Himmelsmechanik, die darunter aufgeführten in der terrestrischen Mechanik bewährt. Mit Himmelskörpern kann man keine Stoßversuche machen oder ihre trägen Massen mittels (7) bestimmen, so dass ihre trägen Massen zunächst nicht bestimmbar sind. Dennoch legt die Ähnlichkeit der Erhaltungssätze eine *universelle Proportionalität zwischen schweren und trägen Massen* (nicht zu vergleichen mit der Universalität des freien Falls, vgl. Abschnitte 4 und 8) nahe:

$$M = Gm. \tag{20}$$

Dies kann nach Cavendish experimentell geprüft werden, indem die Beschleunigungen a leichter Probekörper in der Nähe schwerer Körper gemessen werden und aus

$$a = \frac{M}{r^2} \tag{21}$$

die schweren Massen der letzteren bestimmt werden. Deren träge Massen m können andererseits mittels (13) oder (19) bestimmt werden. Dabei zeigt sich, dass (20) gilt mit (Schlamminger et al, PRL **89**, 161102-1 (2002))

$$G = 6,67407(22) \cdot 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}. \tag{22}$$

Die relative Unsicherheit dieses Wertes ist allerdings größer als bei allen anderen Naturkonstanten. (Verbesserungen um zwei Zehnerpotenzen sind angekündigt, aber noch nicht bestätigt worden.) Für die <u>Materialunabhängigkeit</u> von G gibt es **ein** genaues Experiment (rel. Unsicherheit $5 \cdot 10^{-5}$) von Kreuzer (1968), aber nur für **ein** Paar von Materialien.

Die r^{-2}-Abhängigkeit in (21) ist neuerdings für kleine Abstände aufgrund theoretischer Spekulationen in Zweifel gezogen worden, doch hat sie sich experimentell bis zu Abständen von 0,2 mm als gültig erwiesen. Im Großen hat sie sich im Planetensystem und in ähnlichen Systemen bewährt; auf noch (z.T. weit) größeren Skalen wird (21) zur Massenbestimmung benutzt, was zum Problem der dunklen Materie geführt hat (zusammen mit anderen Argumenten).

Wegen (20) ist es üblich und zweckmäßig, die M zugunsten der m zu eliminieren und von <u>Masse</u> (ohne Adjektiv) zu sprechen. Damit wird dann die Gravitations"kraft"

$$K = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}, \tag{23}$$

wofür offensichtlich actio = reactio gilt. (Man bemerke aber, dass mit dieser Bezeichnung und (23) nichts über (7) Hinausgehendes zur Himmelsmechanik hinzugeführt wird.)

Der Impulserhaltungssatz ist gleichwertig damit, dass der Massenmittelpunkt konstante Geschwindigkeit hat. Aufgrund innerer Kräfte kann ein System sich also nicht in Bewegung setzen (wie Münchhausen mit seinem Zopf). Schreiben wir nun, mit Gravitations- und anderen Kräften

$$m_j \ddot{\vec{x}}_j = \sum_{k \neq j} \left(\frac{G\ m_j\ m_k}{|\vec{x}_k - \vec{x}_j|^3} (\vec{x}_k - \vec{x}_j) + K_{jk} \right)$$

mit K_{jk} = nicht gravitative Kraft von Körper (k) auf Körper (j), so sehen wir, dass $\vec{K}_{jk} = -\vec{K}_{kj}$ für Impulserhaltung hinreichend ist. (Elektrostatische Multipolkräfte, van-der-Waals-Kräfte, elastische Kräfte. In der Kontinuummechanik folgt actio = reactio für Spannungen nach Euler und Cauchy aus der Grundgleichung der Mechanik und dem Schnittprinzip.)

8 Das schwache und das starke Äquivalenzprinzip

In der traditionellen, "vor-Einsteinschen", Darstellung der Newtonschen Mechanik und Gravitationstheorie wird die Sonderrolle der Gravitation, die in (8) und (17) und in der Problematik des Begriffs Inertialsystem zum Ausdruck kommt, nicht deutlich, da die Newtonschen Axiome als vom Himmel fallend an den Anfang gestellt werden. Dann erscheint es sonderbar, dass die träge Masse zugleich bestimmt, wie stark ein Körper auf die Gravitation reagiert. In (19) tritt m ja rechts in der Rolle der "passiven schweren Masse" auf. Angesichts der großen Unterschiede im mikroskopischen Aufbau der Stoffe - verschiedene Anteile an Protonen, Neutronen, Elektronen, verschiedene Anteile der Wechselwirkungen an den Bindungsenergien - ist die Proportionalität der trägen mit der passiven schweren Masse ja sehr bemerkenswert, und man kann (mit Newton, Bessel, Hertz, ...) fragen, ob dies tatsächlich genau zutrifft. Zur Prüfung macht man den Ansatz

$$m\ddot{\vec{x}} = \mu\vec{g} + \vec{K} \tag{24}$$

(z.B. mit $\vec{K}$ als elastischer Kraft) und untersucht experimentell, ob das Verhältnis $\frac{\mu}{g}$ materialunabhängig ist.

Für frei im Vakuum fallende Körper ($\vec{K} = 0$) wurde die Materialunabhängigkeit von $\frac{\mu}{m}$ mit der relativen Genauigkeit $5 \cdot 10^{-10}$ (Niebauer et al 1987, Uran und Kupfer) bestätigt. Experimente mit Drehwaagen ($\vec{K}$ = elastische Kraft) auf der Erde, bei denen "Zentrifugalkraft" $\propto m$ und "Schwerkraft" $\propto \mu$ verglichen werden, haben eine Genauigkeit von 10^{-12} (Braginsky at al, 1972) erreicht. Siehe dazu etwa Ciufolini und Wheeler, Gravitation and Inertia, Princeton 1995, sec. 3.2.1, wo solche Experimente kurz besprochen werden und die Originalliteratur zitiert ist.

Bei den soeben genannten Experimenten handelt es sich um Probekörper, deren Gravitations-Selbstenergie vernachlässigbar ist. Dass für solche Körper $\mu = m$ ist, wird oft als schwaches Äquivalenzprinzip bezeichnet. Dass $\mu = m$ für **alle** Körper gilt, wird starkes Äquivalenzprinzip genannt. Für Erde und Mond weichen die Verhältnisse

$$\gamma = \frac{\text{Gravitations-Selbstenergie}}{c^2 \times \text{Träge Masse}} \tag{25}$$

(Newtonsch berechnet) voneinander ab um $4,4 \cdot 10^{-10}$ (Ciufolini et al, S. 114), und dies könnte eine entsprechende Verschiedenheit der Verhältnisse $\frac{\mu}{m}$ zur Folge haben. Ersetzt man in (7) $\ddot{\vec{x}}_j$ durch $\frac{m}{\mu}\ddot{\vec{x}}_j$, wie es (24) entspricht, so ergibt sich für den relativen Ortsvektor $\vec{x}$ des Mondes relativ zur Erde

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{M_{eff}}{|\vec{x}|^3}\vec{x} + \{(\frac{\mu}{m})_E - (\frac{\mu}{m})_M\}\vec{g} \tag{26}$$

mit $M_{eff} = (\frac{\mu}{m})_M \; M_E + (\frac{\mu}{m})_E \; M_M$ (M: Mond, E: Erde), worin $\vec{g}$ die von der Sonne herrührende Beschleunigung ist, mit der Erde und Mond auf die Sonne zu fallen; $\vec{g} \approx const.$ im Bereich des Erde - Mond - Systems.

Das Störungsglied in (26) bewirkt eine Streckung der Mondbahn in Sonnenrichtung. Da die Mondbewegung mit Laser-Echos sehr genau ausgemessen wurde, konnte eine Schranke für die $\frac{\mu}{m}$-Differenz in (26) bestimmt werden, nämlich $5 \cdot 10^{-13}$. Schreibt man den Beitrag der Gravitations-Selbstenergie zu $\frac{\mu}{m}$ als $\eta\gamma$, so folgt für den sogenannten Nordtvedt-Parameter η die Schranke 10^{-3} (Williams et al 1996, Schneider et al 1997; siehe Stoffel in Relativistic Astrophysics, Riffert et al (eds.), Braunschweig 1998).

Die experimentellen Ergebnisse aus diesem und dem vorangehenden Abschnitt zeigen, dass man bei dem jetzigen Kenntnisstand im Rahmen der Newtonschen Theorie mit **einer** den Körpern zukommenden Masse m auskommt, die zugleich als träge und passive schwere Masse und - bis auf den Umrechnungsfaktor G - als aktive schwere Masse fungiert. Diese Tatsache ist grundlegend für die Allgemeine Relativitätstheorie.

9 Die Gesetze der Mechanik für ausgedehnte, deformierbare Materie

Bisher wurden in dieser Übersicht die Körper als mit Masse behaftete Punkte idealisiert. Dies führt nicht nur zu Divergenzen der Kräfte für verschwindende

Abstände, sondern ist für makroskopische Körper unrealistisch. Es liegt nahe, die bisherigen Ansätze auf stetig ausgebreitete Materie mit Massendichte $\rho \geq 0$ und Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ zu verallgemeinern und statt der wechselseitigen Kräfte zwischen Punktkörpern ein Gravitationsfeld $\vec{g}$ oder Gravitationspotential ϕ mit $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$ anzunehmen, das überall definiert und mit ρ verknüpft ist, und daraus die Punktkörper-Beschreibung als Näherung wiederzugewinnen. Um der Einfachheit willen nehme ich an, dass die Entropie pro Masse der Materie einen räumlich und zeitlich konstanten Wert hat (isentropische Vorgänge) und beschreibe die Materie als ideale Flüssigkeit. Dann sind die Grundgesetze (in 3dim. Tensorschreibweise):

$$\partial_t \rho + \partial_a(\rho\ v^a) = 0, \tag{27}$$

$$\rho(\partial_t v^a + v^b \partial_b\ v^a + \partial^a \phi) = -\partial^a p, \tag{28}$$

$$p = \hat{p}(\rho), \tag{29}$$

$$\triangle\phi = \delta^{ab}\partial_a\partial_b\phi = 4\pi G\rho. \tag{30}$$

(p Druck, $\partial^a\ p = \delta^{ab}\ \partial_b\ p,\ \ \rho = \frac{dm}{dv}$ Dichte der Masse.) Unter Verwendung von (27) und (30) kann (28) durch

$$\partial_t(\rho\ v^a) + \partial_b(\rho\ v^a v^b + p\ \delta^{ab} + P^{ab}) = 0 \tag{31}$$

mit

$$P^{ab} = \frac{1}{4\pi G}(\partial^a\phi\ \partial^b\phi - \frac{1}{2}\delta^{ab}\partial_c\ \phi\partial^c\ \phi) \tag{32}$$

ersetzt werden. (27) drückt die lokale Erhaltung der Masse, (31) die des Impulses aus, mit P^{ab} als Drucktensor des Gravitationsfeldes.
Die Gesetze (27) - (32) sind invariant nicht nur gegenüber Galileitransformationen, sondern gegenüber allen Transformationen aus $\mathcal{K}$ mit $\vec{\omega} = 0$, wenn ϕ geeignet (nicht als Skalar, Übung!) transformiert wird; sie legen das Bezugssystem bis auf beliebig zeitabhängige Translationen $d^b(t)$ in (1) fest. (Rotation hat in der klassischen Mechanik sogar lokal absolute Bedeutung, wie Newton durch seinen Eimerversuch demonstrierte. Dass Translationen nicht in diesem Sinne absolut sind, war Newton klar, wie sein Corrolar VI zeigt. Er postulierte dennoch ein absolutes Bezugssystem.)

Die Gesetze (27) - (32) sind zwar lokal, definieren aber keine Feldtheorie; denn sie enthalten nicht $\partial_t\ \phi$. Das Potentialfeld hat "keine eigenen Freiheitsgrade".

Diese Gesetze legen auch nicht die Zeitentwicklung der Variablen ρ, v^a, ϕ fest; denn (30) bestimmt ϕ nur bis auf eine harmonische Funktion $\psi(\triangle\psi = 0)$.

Ergänzt man die Gesetze (27-(32) durch die Annahme, dass ρ im räumlich-Unendlichen stärker als r^{-3} abfällt, so ist die Gesamtmasse $M = \int \rho dv$ wohl definiert, und es gibt genau eine Lösung $\phi[\rho]$ von (30), die im Unendlichen gegen Null strebt,

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \phi(t,\vec{x}) = 0, \text{ nämlich} \tag{33}$$

$$\phi(t,\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3y, \tag{34}$$

Diese Abfallbedingungen über ρ und ϕ definieren ein abgeschlossenes System. Damit wird ϕ in jedem Raum $\Re_t$ (Abschnitt 1) ein Funktional von ρ, und (27)- (29) werden zu einem galilei-invarianten dynamischen System für ρ und v^a, das zumindest formal so aussieht, als ob es die Entwicklung von ρ und v^a bei gegebenen Anfangsdaten bestimmte. Bewiesen ist dies allerdings bis jetzt nicht. (Schwierigkeiten: 1. ρ ist nicht positiv nach unten beschränkt, 2. Dynamik etwaiger Ränder von Körpern, wo ρ unstetig ist, 3. Integrodifferentialgleichung, Erhaltung der Abfallbedingung.)

Wendet man die auf (27) - (30) und (33) beruhende Theorie auf ein System von (endlich vielen) Körpern an, die in den sonst leeren Raum eingebettet sind, so folgt aus (27), dass die Massen der Körper konstant sind. Aus der Bedeutung des Drucks folgt, dass auf den Oberflächen der Körper der Druck gleich Null ist. Damit und aus (28), (30) und (33)- also (34) - folgt weiter, dass die Selbstkraft, die ein Körper aufgrund des Potentials seiner eigenen Dichte auf sich ausübt, gleich Null ist (actio = reactio). Schließlich folgt daraus noch, dass die Beschleunigung des Massenmittelpunktes jedes Körpers sich von dem in (7) angegebenen Ausdruck nur unterscheidet um einen relativen Fehler der Größenordnung

$$\left(\frac{\text{Radius des Körpers}}{\text{Abstand d. Körpers v.d. anderen Körpern}}\right)^2$$

(Radius $\equiv$ Radius der kleinsten Kugel um den Massenmittelpunkt, der den Träger von ρ des betreffenden Körpers enthält. Die Abschätzung kann exakt gemacht und für nahezu kugelförmige Körper wesentlich verschärft werden. Für die Erde im Feld der Sonne ist der relative Fehler kleiner als 10^{-15}.) Nimmt man statt Füssigkeitskörpern starre Kugeln an, so folgt bekanntlich für die Massenmittelpunkte exakt das System (7). Die auf (7) beruhende

Massenpunkt-Theorie ist also in der durch (27) - (30) und (33) gegebenen Theorie als Näherung enthalten. (Diese Behauptung setzt allerdings voraus, dass die Kontinuumtheorie überhaupt n-Körperlösungen hat, was nicht bewiesen wurde.)

10 Erfolge und Mängel der Newtonschen Mechanik

Die Newtonsche Mechanik einschließlich der Gravitationstheorie hat sich bestens bewährt zur genauen Beschreibung der Bewegungen makroskopischer Körper, von Labordimensionen bis zum Planetensystem, zu Doppelsternen und Sternhaufen. Sie ist auch grundlegend für das Verständnis des Sternaufbaus, der Sternrotationen und -schwingungen. Alle diese Anwendungen beziehen sich auf Gebilde, die als abgeschlossene Systeme idealisiert werden und bei denen die Relativgeschwindigkeiten der Körper sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c, die Drucke klein gegen die (relativistisch beurteilte) Energiedichte und die Gravitationspotentiale klein gegen c^2 sind,

$$(\frac{v}{c})^2 \ll 1, \quad \frac{p}{\rho c^2} \ll 1, \quad \frac{\phi}{c^2} \ll 1 \tag{35}$$

Bis 1900 war nur eine unerklärt gebliebene, deutliche Abweichung von den Vorhersagen der Theorie bekannt: Für die langsame ("säkulare") Drehung der Achsen der Merkurbahn relativ zu den Koordinatenachsen des in 1.3 definierten astronomischen Inertialsystems ergab die Störungstheorie eine Winkelgeschwindigkeit von etwa 5550" pro Jahrhundert, etwa 43" weniger als die Beobachtungen ergeben hatten, bei einer geschätzten Beobachtungsunsicherheit von etwa 0,4". Diese kleine, schon 1845 von Leverrier bemerkte, Abweichung wurde erst 1915 von Einstein mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt.

Ein Mangel der Newtonschen Theorie ist, dass sie *keine Dynamik für räumlich unbeschränkte Massenverteilungen*, auf die (33) und (34) nicht anwendbar sind, enthält, so dass die Theorie - jedenfalls ohne Zusatzannahmen - nicht auf die Kosmologie anwendbar ist, was um 1900 erkannt wurde. Es gibt allerdings Lösungen der (lokalen) Gleichungen (27) - (30), die bezüglich jedes bewegten Massenelements isotrop sind, also keine Richtung auszeichnen. Die Hinzunahme der Isotropie zu (27) - (30) legt die Dynamik solcher Modelle fest, die sich als rümlich homogen erweisen. Diese "Newtonschen" kosmologischen Modelle sind den entsprechenden relativistischen Modellen sehr ähnlich, wie ab 1935 bemerkt wurde. In diesen kosmologischen Modellen legt die Symmetrievoraussetzung zusammen mit (30) das Potenzial ϕ fest; (34) gilt nicht.

Mit dem eben erwähnten Mangel hängt die Problematik der Inertialsysteme und damit der Galilei-Invarianz eng zusammen. Wie besprochen, lassen sich durch mechanische Experimente in endlichen Bereichen zwar nichtrotierende Bezugssysteme und lokale Inertialsysteme, aber nicht globale Inertialsysteme feststellen. Damit ist im wesentlichen äquivalent, dass kräftefreie Bewegungen nicht real aufweisbar sind, da alle Körper die Gravitation "spüren". (Das Trägheitsgesetz ist eine für den Aufbau der Mechanik nützliche Fiktion, aber kein "Erfahrungsssatz". Dazu schrieb Max Born (Die Relativitätstheorie Einsteins, 6. Aufl., Berlin 2001, S. 25): "Körper, die wirklich allen Einwirkungen entzogen sind, kennen wir in unserer Erfahrung nicht, und wenn wir sie uns in der Einbildungskraft vorstellen, wie sie einsam mit konstanter Geschwindigkeit auf gerader Bahn durch den Weltenraum ziehen, so geraten wir sofort in das Problem der absolut geraden Bahn im absoult ruhenden Raum.")

Die eben besprochene prinzipielle Schwierigkeit spielt für viele praktische Probleme der Astronomie keine Rolle aus folgendem Grund. Jedes kleine Teilchensystem S' eines als abgeschlossen angenommenen Systems S kann selbst näherungsweise als abgeschlossen behandelt werden, falls das von $S'-S$ herrührende Beschleunigungsfeld $\vec{g}$ innerhalb S' nahezu räumlich konstant ist. Dann nämlich ist das Schwerpunktsystem von S' nahezu ein Inertialsystem für S', wie schon Newton bemerkte. Darauf beruht es, dass man das Erde-Mond-System als Teil des Sonnensystems, das Sonnensystem als Teil des Milchstraßensystems, das Milchstraßensystem als Teil der lokalen Galaxiengruppe für sich erfolgreich beschreiben kann, obwohl die jeweiligen "Inertialsysteme" relativ zueinander beschleunigt sind. In den oben angedeuteten Newtonschen kosmologischen Modellen treten an die Stelle globalen Inertialsysteme starre, nicht rotierende, relativ zueinander translativ beschleunigte Bezugssysteme, die durch eine Untergruppe der kinematischen Gruppe verknüpft sind. Diese Bemerkungen zeigen, dass die Frage nach dem "wahren" Inertialsystem sinnlos ist. (Die Allgemeine Relativitätstheorie kommt ohne globale Inertialsystem aus.)

Eine weitere Frage, die schon früh diskutiert wurde, betrifft die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation. Sie wurde aktuell nach den Erfolgen der Maxwellschen Elektrodynamik, wurde dringlich nach Aufstellung der Speziellen Relativitätstheorie und fand ihre - zunächst theoretische - Beantwortung in der Allgemeinen Relativitätstheorie. (Inzwischen gibt es indirekte empirische Hinweise darauf, dass sich Änderungen des Gravitationsfeldes mit c ausbreiten; aber der direkte Nachweis mit Gravitationswellen steht noch aus.)

Schließlich sei erwähnt, dass Mach, Einstein u.a. es als unbefriedigend beurteilten, dass in der Newtonschen Physik die geometrische Struktur der

Raumzeit einschließlich der Inertialsysteme als ein für alle Mal fest gegeben - absolut - angenommen wird. Mach: "Es widerspricht dem wissenschaftlichen Verstande, ein Ding zu setzen, das zwar wirkt, auf das aber nicht gewirkt werden kann." Auch dieser Mangel wurde durch die Allgemeine Relativitätstheorie behoben, in der die Gravitation ein Aspekt der Raumzeitgeometrie (Metrik, Zusammenhang, Krümmung) ist, die mit der Materie (Energie, Impuls) wechselwirkt.

Die Allgemeine Relativitätstheorie beruht auf lokalen Gesetzen. Sie kann sowohl die Entwicklung räumlich unbeschränkter Massenverteilungen beschreiben (ohne eine zu (33) analoge Randbedingung) als auch abgeschlossene Systeme darstellen; ihre Vorhersagen weichen merklich von denen der Newtonschen Theorie ab u.a. dann, wenn eine der Bedingungen (35) verletzt ist.