Vorbereitung auf die Allgemeine Relativitätstheorie

I. Mannigfaltigkeiten und Tensorfelder

Jürgen Ehlers

Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik

Albert-Einstein-Institut, Golm

1 Tensoralgebra

Die Tensoralgebra ist ein Kalkül zur Darstelung linearer und multilinearer Abbildungen. Sie wird ausgiebig angewandt in Geometrie, Relativitätstheorie und Feldtheorie.

1.1 Vektorräume

Sei V ein n-dimensionaler reller Vektorraum (n-endlich). Wir bezeichnen die Elemente von V mit $u, v, ...$ Basen von V schreiben wir als $e_\alpha, e_{\alpha'}$ u.ä., wobei $\alpha = 1, \ldots, n$ und $\alpha' = 1', \ldots, n'$, d.h. wir unterscheiden die Basen voneinander durch Verzierungen der Indizes ihrer Vektoren. Unter Verwendung der Summationsregel für doppelt vorkommende Indizes gilt:

$$u = u^\alpha e_\alpha = u^{\alpha'} e_{\alpha'}. \tag{1}$$

Die Zahlen u^α werden die Komponenten des Vektors bezüglich der Basis e_α genannt, entsprechend $u^{\alpha'}$. In Formeln wie (1) können die Summationsindizes substituiert werden, etwa $\alpha \mapsto \beta$ oder $\alpha' \mapsto \gamma'$, aber nicht (!) $\alpha \mapsto \alpha'$, denn bei der hier verwendeten Notation beziehen sich "ungestrichen" und "gestrichen" indizierte Größen auf verschiedene Basen. Ein Basiswechsel $e_\alpha \to e_{\alpha'}$ definiert durch

$$e_\alpha = e_{\alpha'} A^{\alpha'}{}_\alpha \tag{2}$$

eine invertierbare Transformationsmatrix A und ist durch diese bestimmt. Aus (1) und (2) folgt das Transformationsgesetz

$$u^{\alpha'} = A^{\alpha'}{}_\alpha u^\alpha \tag{3}$$

für Vektorkomponenten. Für die zu (2), (3) inverse Transformation schreiben wir konsequenterweise

$$e_{\alpha'} = e_\alpha A^\alpha_{\alpha'}, \qquad u^\alpha = A^\alpha{}_{\alpha'} u^{\alpha'},$$

wobei

$$A^\alpha_{\alpha'} A^{\alpha'}{}_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{4}$$

gilt mit (δ^α_β) = Einheitsmatrix.

1.2 Dualraum

Eine reellwertige lineare Funktion ω auf dem Vektorraum V, die also für alle Vektoren u, v und Koeffizienten λ die Gleichung

$$\omega(\lambda u + v) = \lambda\omega(u) + \omega(v), \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}, u \in V, v \in V$$

erfüllt, wird ein **<u>Kovektor</u>** (auch Linearform oder 1-Form) auf V genannt. Definiert man die Addition und Skalarmultiplikation von Kovektoren durch

$$(\omega + \varphi)(u) := \omega(u) + \varphi(u) \qquad (\lambda \cdot \omega)(u) := \lambda\omega(u),$$

so ist die Menge V^* der Kovektoren auch ein Vektorraum, der sogenannte <u>Dualraum</u> zu V. Ein Kovektor ω ist durch die Werte $\omega(e_\alpha)$ auf einer Basis von V eindeutig bestimmt; es ist ja

$$\omega(u^\alpha e_\alpha) = u^\alpha \omega(e_\alpha).$$

Einer Basis $\{e_\alpha\}$ von V wird durch

$$\theta^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta \tag{5}$$

eine Basis $\{\theta^\alpha\}$ von V^* zugeordnet, die zu $\{e_\alpha\}$ duale Basis. Nach (5) gilt

$$\omega(e_\alpha) = \omega(e_\beta)\theta^\beta(e_\alpha),$$

also ist (nach der (5)vorangehenden Bemerkung)

$$\omega = \omega(e_\beta)\theta^\beta.$$

Die in (5) auftretenden Zahlen

$$\omega(e_\alpha) =: \omega_\alpha \tag{6}$$

sind also die Komponenten von ω bezüglich $\{\theta^\alpha\}$, und (5) kann damit auch

$$\omega(u) = \omega_\alpha u^\alpha \tag{7}$$

geschrieben werden. (Warnung: Dies ist kein Innenprodukt; die "Faktoren" stammen ja aus verschiedenen Vektorräumen.) Aus (7) geht hervor, dass die Beziehung zwischen V und V^* symmetrisch ist, man kann den Dualraum von V^* mit V identifizieren, $V^{**} = V$. Um diese Symmetrie hervorzuheben, schreiben wir statt (7) auch

$$\omega \cdot u = u \cdot \omega \tag{8}$$

Aus (3) und der Invarianz von (7) folgt als Transformationsgesetz für Kovektorkomponenten,

$$\omega_{\alpha'} = \omega_\alpha A^\alpha{}_{\alpha'}. \tag{9}$$

1.3 Tensoren

Definition: Unter einem <u>$(s|r)$**-Tensor**</u> S versteht man eine in jedem Argument lineare (multilineare) Abbildung

$$S : [\underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{s-mal}] \times [\underbrace{V \times V \times ... \times V}_{r-mal}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der Begriffe "Kovektor" ($\equiv (0 \mid 1) - Tensor$) und "Vektor" ($\equiv (1 \mid 0) - Tensor$). Skalare werden auch als $(0 \mid 0)$-Tensoren bezeichnet. Wie Vektoren können auch Tensoren in Komponenten dargestellt werden. Am Beispiel eines $(1 \mid 2)$-Tensors S wird dies erläutert: Seien u, v Vektoren, ω ein Kovektor.

$$S(\omega, u, v) = S(\omega_\alpha \theta^\alpha, u^\beta e_\beta, v^\gamma e_\gamma) \qquad = \omega_\alpha u^\beta v^\gamma S(\theta^\alpha, e_\beta, e_\gamma)$$

S ist also durch die Werte

$$=: S^\alpha{}_{\beta\gamma} := S(\theta^\alpha, e_\beta, e_\gamma) \tag{10}$$

auf einer Basis von V und deren Dualraum bestimmt.

1.4 Tensorprodukt

Aus zwei Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ kann man die die Funktion $h(x, y) = f(x)g(y)$ bilden. Entsprechend kann man Tensoren "multiplizieren". Ist S ein $(1 \mid 1)$-Tensor und T ein $(0 \mid 2)$-Tensor, so wird durch

$$ST(\omega, u, v, w) := S(\omega, u)T(v, w) \tag{11}$$

offenbar ein $(1 + 0 \mid 1 + 2) = (1 \mid 3)$-Tensor ST definiert. Wichtig ist die Reihenfolge der Faktoren S, T und der Argumente, die aus (11) zu ersehen sind. Danach ist

$$TS(\omega, u, v, w) = T(u, v)S(\omega, w).$$

Diese Multiplikation kann offenbar zwischen beliebigen Tensoren ausgeführt werden; dabei addieren sich die "Grade" s und r der Faktoren. Das Tensorprodukt ist assoziativ, nicht kommutativ, und mit der Addition gleichartiger Tensoren durch Distributionsgesetze verknüpft,

$$STU := S(TU) = (ST)U, \qquad ST \neq TS \ i.a.,$$

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T.$$

Oft wird $S \otimes T$ statt ST geschrieben. Bildet man aus den Basisgrössen e_α, θ^β die Tensorprodukte $e_\alpha\theta^\beta\theta^\gamma$, so ergeben die Definitionen die Werte

$$(e_\alpha\theta^\beta\theta^\gamma)(\theta^\lambda, e_\mu, e_\nu) = \delta^\lambda_\alpha\delta^\beta_\mu\delta^\gamma_\nu$$

(vgl. (5)) so dass für den Tensor S aus (10) folgt:

$$S = S^\alpha{}_{\beta\gamma}(e_\alpha\theta^\beta\theta^\gamma).$$

Die $(e_\alpha\theta^\beta\theta^\gamma)$ bilden also eine Basis im linearen Raum der $(1 \mid 2)$-Tensoren, und die in (10) definierten Zahlen erweisen sich als die Komponenten von S bezüglich dieser Basis.
Nach diesen Verabredungen und deren Verallgemeinerungen auf beliebige Grade s, r überzeugt man sich von folgenden Regeln:

$$(ST)^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = S^\alpha{}_\beta T_{\gamma\delta} \tag{12}$$

Bei Basistransformationen gilt (Beispiel):

$$u^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}{}_\alpha A^\beta{}_{\beta'} A^\gamma{}_{\gamma'} u^\alpha{}_{\beta\gamma}. \tag{13}$$

(Wer es eilig hat, braucht sich von diesem Abschnitt nur (12) und (13) zu merken.)
Folgender Hilfssatz ist gelegentlich nützlich: Jeder $(1|1)$-Tensor kann als eine Summe von Tensorprodukten der Form (Vektor) (Kovektor) dargestellt werden,

$$S = \sum X_i\omega_i$$

Das ergibt sich aus

$$S = S^\alpha{}_\beta e_\alpha\Theta^\beta = (S^\alpha_1 e_\alpha)\Theta^1 + ... + (S^\alpha{}_n e_\alpha)\Theta^n.$$

Entsprechend lässt sich jeder $(s \mid r)$-Tensor alas Summe vor Produkten aus je s Vektoren und r Kovektoren darstellen.

1.5 Spur, Verjüngung

Aus (13) und (4) geht hervor, dass

$$u^{\alpha'}{}_{\alpha'\gamma'} = A^\gamma{}_{\gamma'} u^\alpha{}_{\alpha\gamma} \tag{14}$$

ist. Daraus folgt - vgl. (3) - dass $u^{\alpha'}{}_{\alpha'\gamma'}$ und $u^\alpha{}_{\alpha\gamma}$ Komponenten desselben Kovektors

$$u^\beta{}_{\beta\alpha}\theta^\alpha \tag{15}$$

sind. Die Operation $u^\alpha{}_{\beta\gamma} \longmapsto u^\alpha{}_{\alpha\beta}$ macht also aus einem $(1 \mid 2)$-Tensor einen $(0 \mid 1)$-Tensor. Das gleiche gilt für $u^\alpha{}_{\beta\gamma} \longmapsto u^\alpha{}_{\beta\alpha}$, aber diese "Verjüngung" von u ist i.a. verschieden von der früheren aus (15).
Die am Beispiel eines $(1 \mid 2)$-Tensors besprochene Operation, die die Spurbildung $A^\alpha{}_\beta \mapsto A^\alpha{}_\alpha$ sowie (7), (9) verallgemeinert, kann an jedem Indexpaar aus einem oberen und einem unteren Index vorgenommen werden und dient zusammen mit der Multiplikation dazu, aus Tensoren solche kleinerer Grade und insbesondere Skalare zu machen, z.B.

$$A^\alpha{}_\beta u^\beta \quad , \quad B^\alpha{}_\beta B^\beta{}_\alpha. \tag{16}$$

Bei indexfreier Schreibweise wollen wir Verjüngungen über "benachbarte" Indizes durch einen Punkt andeuten wie in (9), also

$$v^\alpha = A^\alpha{}_\beta u^\beta \Longleftrightarrow v = A \cdot u \tag{17}$$

Außerdem wird

$$A^\alpha{}_\alpha = SpA \tag{18}$$

geschrieben. Dann ist z.B.

$$B^\alpha{}_\beta B^\beta{}_\alpha = Sp(B \cdot B). \tag{19}$$

1.6 Symmetrien von Tensoren

In Anwendungen kommen hauptsächlich Tensoren mit Symmetrieeigenschaften vor. Ein $(0 \mid 2)$-Tensor S heißt symmetrisch, wenn für alle u, v

$$S(u,v) = S(v,u)$$

ist. In Komponenten drückt sich das aus durch

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$$

Entsprechend ist Antisymmetrie (Schiefsymmetrie) definiert durch

$$T(u,v) = -T(v,u) \;\longleftrightarrow\; T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$$

Allgemeiner nennt man einen Tensor in Bezug auf einige seiner Vektorargumente oder seiner Kovektorargumente symmetrisch (antisymmetrisch), wenn sein Wert bei allen Permutationen dieser Argumente ungeändert bleibt (das Vorzeichen der betreffenden Permutation annimmt). (Beachte: $S(\omega, u) = S(u, \omega)$) für einen $(1 \mid 1)$-Tensor hat keinen Sinn, weil das erste Argument

von S für Kovektoren reserviert ist.)
Folgende Abkürzungen, hier mit Komponenten formuliert, sind nützlich:

$$S_{(\alpha_1 \ldots \alpha_p)} := \frac{1}{p!} \sum S_{\beta_1 \ldots \beta_p},$$

wo über alle Permutationen $\alpha_1, \ldots \alpha_p \mapsto \beta_1, \ldots \beta_p$ der α-Indizes zu summieren ist. Beispiel:

$$S_{(\alpha\beta\gamma)} := \frac{1}{6}(S_{\alpha\beta\gamma} + S_{\beta\gamma\alpha} + S_{\gamma\alpha\beta} + S_{\beta\alpha\gamma} + S_{\gamma\beta\alpha} + S_{\alpha\gamma\beta}). \tag{20}$$

Analog bezeichnet die Klammer [...]Antisymmetrisieren:

$$S_{[\alpha\beta\gamma]} := \frac{1}{6}(S_{\alpha\beta\gamma} + S_{\beta\gamma\alpha} + S_{\gamma\alpha\beta} - S_{\beta\alpha\gamma} - S_{\gamma\beta\alpha} - S_{\alpha\gamma\beta}). \tag{21}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt für jeden $(0 \mid 2)$-Tensor die "direkte" Zerlegung

$$S_{\alpha\beta} = S_{(\alpha\beta)} + S_{[\alpha\beta]}. \tag{22}$$

$S_{\alpha\beta}$ kann also als aus zwei verschiedenen, einfacheren Tensoren zusammengesetzt betrachtet werden. Von Tensoren, die in Geometrie oder Physik fundamentale Bedeutung haben, wird man erwarten, dass sie nicht analog zu (22)zerlegbar, sondern "unzerlegbar" (irreduzibel) sind. (Das läßt sich mittels der Darstellungstheorie präzisieren, was wir aber nicht benötigen.)

1.7 Ergänzungen

Natürlich sind Tensoren etwas anderes als ihre Komponenten. Wie wir gesehen haben, lassen sich aber die Tensoroperationen und Symmetrieeigenschaften durch die Komponenten in einer für alle Basen gleichen Form ausdrücken. Deshalb ist es bequem, von "dem Tensor" $S^\alpha{}_{\beta\gamma}$ statt von $S = S^\alpha{}_{\beta\gamma} e_\alpha \theta^\beta \theta^\gamma$ zu sprechen. Die Indizes sind dann als Platzhalter für Funktionsargumente aufzufassen, wobei es auf die Basis nicht ankommt. (Diese Auffassung kann formalisiert werden; man unterscheidet dann zwischen "abstrakten Indizes" und Komponentenindizes, was wir aber nicht tun wollen.) Wenn bestimmte Basen und Komponenten gemeint sind, so muß man das jeweils im Text dazusagen.
Wichtig ist die Reihenfolge der oberen und der unteren Indizes. Man darf zwar statt $S^{\alpha\beta} = u^\alpha v^\beta$ auch $S^{\beta\alpha} = u^\beta v^\alpha$ schreiben, aber nicht $S^{\alpha\beta} = v^\alpha u^\beta$.
Ein Vorteil des Tensorbegriffs ist, dass ein Tensor "mehrere Rollen spielen" kann. Ein Tensor $S^\alpha{}_{\beta\gamma}$ definiert z.B. die Abbildungen

$$(u^\alpha, v^\beta) \mapsto S^\alpha{}_{\beta\gamma} u^\beta v^\gamma,$$
$$(\omega_\alpha, u^\beta) \mapsto S^\alpha{}_{\beta\gamma} \omega_\alpha, u^\beta$$

und andere mehr, und das wird in der Physik ausgiebig verwendet.

Es kommt manchmal vor, dass jeder Basis von V ein Zahlenschema, etwa $X^\alpha{}_\beta, X^{\alpha'}{}_{\beta',...}$zugeordnet ist und man wissen möchte, ob diese Zahlen Komponenten eines Tensors sind. Dann ist oft folgende Quotientenregel nützlich: Wenn in allen Basen die Zahlen $X^\alpha{}_\beta u^\beta = w^\alpha$ Komponenten eines Vektors w sind, falls u^β Komponenten eines Vektors u sind, dann sind die $X^\alpha{}_\beta, X^{\alpha'}{}_{\beta',...}$ Komponenten eines Tensors. Analoge Aussagen gelten für Zahlenschemata mit anderen Indizes. Der Beweis sei dem Leser als Übung überlassen.

1.8 Metrik, Innenprodukt

Ein Innenprodukt auf dem Vektorraum V ist durch einen symmetrischen $(0 \mid 2)$-Tensor gegeben,

$$g(X,Y) = g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta, \qquad g_{[\alpha\beta]} = 0. \tag{23}$$

Wegen der Symmetrie ist $g_{\alpha\beta}$ durch die quadratische Form

$$X^2 := g(X,X) = g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \tag{24}$$

bestimmt; man braucht ja nur den Wert der Form für $X+Y$ auszurechnen. Zu $g_{\alpha\beta}$ (damit meinen wir jetzt den Tensor, in der Redeweise von 1.7) gibt es eine Basis, in der die Komponenetenmatrix von $g_{\alpha\beta}$ diagonal ist und die Diagonalelemente ± 1 oder 0 sind; wir schreiben

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} diag(\underbrace{1,...1,}_{p}\underbrace{-1,...,-1}_{m}\underbrace{0,...,0}_{e}). \tag{25}$$

(Der Stern über = soll andeuten, dass diese Gleichung nur in speziellen Basen gilt.)
Die Anzahlen p, m, e der "positiven, negativen und entarteten" Dimensionen sind Invarianten des Tensors $g_{\alpha\beta}$. Diesen Standardsatz der linearen Algebra beweisen wir hier nicht.
Ist ein Innenprodukt (Skalarprodukt) gegeben, so heißt $g_{\alpha\beta}$ metrischer Tensor oder "die Metrik" von V, wenn $g_{\alpha\beta}$ aus geometrischen oder physikalischen Gründen als fest zu V gehörig betrachtet wird.
X, Y heißen orthogonal, wenn

$$g(X,Y) = g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta = 0$$

ist. X wird Einheitsvektor genannt, wenn $\mid g(X,Y) \mid = 1$ ist.
Ein Innenprodukt bzw. eine Metrik heißt nicht ausgeartet, wenn in (25)

keine Null vorkommt, also $e = 0$ ist. Äquivalent dazu ist, dass in einer - und damit in jeder - Basis $det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ ist. Ebenfalls gleichwertig ist: Nur der Vektor "Null" ist zu allen Vektoren aus V orthogonal.
Künftig betrachten wir nur nicht ausgeartete Metriken und nennen eine Basis mit (25) eine Orthonormalbasis. Die Matrizen, die Orthonormalbasen ineinander überführen (nach (2)), bilden die pseudo-orthogonalen Gruppen $O(p, m)$.

Bei gegebener Metrik ist

$$u^\alpha \;\mapsto\; g_{\alpha\beta} u^\beta =: u_\alpha \tag{26}$$

ein Isomorphismus von V auf V^* mit der Umkehrung

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta, \tag{27}$$

wenn $g^{\alpha\beta}$ zu $g_{\alpha\beta}$ invers ist,

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha. \tag{28}$$

(Dass $g^{\alpha\beta}$ ein Tensor ist, folgt aus (27) mittels der Quotientenregel.) Da die durch die äquivalenten Gleichungen (26),(27) ausgedrückte Beziehung zwischen Vektoren und Kovektoren eineindeutig ist, ist es bei gegebener Metrik üblich, u^α und u_α als verschiedene Repräsentanten desselben Objekts aufzufassen, also die Komponenten von u_α als die kovarianten Komponenten des Vektors u^α zu bezeichnen. Entsprechend können Indizes an beliebigen Tensoren verzogen werden, z.B.

$$S_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta} S^\delta{}_{\beta\gamma}$$

Es ist dann allerdings nötig, die Indizes (wie im Beispiel) so zu schreiben, dass unter jedem oberen und über jedem unteren Index ein Freiplatz reserviert ist, also **nicht**

$$S^\alpha_{\beta\gamma} \qquad , \text{ sondern } S^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

Das Indexverschieben ist eine weitere Operation der (metrischen) Tensoralgebra. Die Rechenregeln sind wohl klar, Beispiele:

$$u^\alpha = T^\alpha{}_\beta v^\beta \Longleftrightarrow u_\alpha = T_{\alpha\beta} v^\beta = T_\alpha{}^\beta v_\beta. \tag{29}$$

Für das Innenprodukt (23) wollen wir, in Übereinstimmung mit (9), nunmehr auch

$$X \cdot Y = X_\alpha Y^\alpha \tag{30}$$

schreiben.

1.9 Volumen und Orientierung

V sei ein Vektorraum, der nicht mit einer Metrik ausgestattet zu sein braucht. Dann ist es oft nützlich, jedem n-Tupel von Vektoren $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Volumen zuzuordnen; die Vektoren können als Kantenvektoren eines Parallelotops gedeutet werden. Zugleich damit soll, für linear unabhängige u_i, zwischen positiv und negativ orientierten Basen unterschieden werden. Für beide Zwecke führt man einen total schiefsymmetrischen $(0 \mid n)$-Tensor η ein und nennt den Betrag von

$$\eta(u_1, ..., u_n) \tag{31}$$

dasVolumen des Parallelotops. Außerdem wird $\{u_i\}$ positiv orientiert oder kurz orientiert genannt, wenn die Zahl (31) positiv ist. In Komponenten ist nach Def.

$$\eta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \eta_{[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]} \neq 0. \tag{32}$$

Zu einer Metrik $g_{\alpha\beta}$ gehört der Volumentensor (auch Volumen-n-Form genannt), für den bezüglich einer orientierten Orthonormalbasis gilt:

$$\eta_{12\ldots n} = 1. \tag{33}$$

(Zu gegebener Metrik ist der Volumentensor bis auf das Vorzeichen bestimmt.)

1.10 Bemerkungen über Euklidische und Lorentzsche Metriken

Eine Metrik heißt Euklidisch, wenn die quadratische Form (24) positiv definit (oder dazu äquivalent in (25) $p = n$) ist, und Lorentzsch, wenn in (25) genau ein Vorzeichen aus der Reihe tanzt. Im Lorentzfall nehmen wir immer $p = n - 1$. Im Euklidischen Fall wird

$$|X| := \sqrt{|X^2|} \tag{34}$$

als Länge interpretiert und ist eine Norm. Es gelten dann die Schwarzsche und die Dreiecksgleichung, und man kann Winkel definieren.
In jedem Fall nennen wir die nichtnegative Zahl $\mid X \mid$ aus (34) den Betrag des Vektors X; $X \mapsto |X|$ ist i.a. keine Norm. Vektoren mit $|X| = 1$ werden Einheitsvektoren genannt-
In einem Vektorraum V mit Lorentzmetrik werden Vektoren mit $T^2 < 0$ zeitartig genannt. Jeder solche Vektor definiert in V eine Zeitorientierung:

X heißt zukunftsgerichtet, geschrieben $X > 0$, wenn $X^2 \leq 0$ und $X \cdot T < 0$ ist. Dann gilt (Übung): Aus $X > 0, Y > 0$ folgt

$$X + Y > 0, \tag{35}$$

$$-X \cdot Y \geq |X| \cdot |Y|, \tag{36}$$

$$|X + Y| \geq |X| + |Y|. \tag{37}$$

2 Mannigfaltigkeiten und Tensorfelder

Für physikalische Theorien benötigt man Räume - z.B. Konfigurationsräume, Phasenräume, Raumzeitmodelle - auf denen man Analysis treiben kann. Die für die Relativitätstheorie wichtigsten diesbezüglichen Begriffe und Formeln werden in diesem Kapitel zusammengestellt.

2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Um auf einem Raum M Analysis treiben zu können, führt man auf (Teilen von) M Koordinaten ein. Die folgenden Definitionen dienen zur Einführung des Begriffs "differenzierbare Mannigfaltigkeit".
Sei M eine (Punkt-)Menge. Eine n-Karte φ für eine Teilmenge U von M ist eine eineindeutige Abbildung von U auf eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Durch φ werden also die Punkte von U durch n-tupel von Zahlen markiert,

$$p \in U : \varphi(p) = (x^\alpha(p)), \tag{38}$$

wobei wie früher $\alpha = 1, ..., n$ ist.
Seien nun φ, φ' zwei Karten, deren Definitionsbereiche U, U' einander überlappen. Dann kommen jedem Punkt aus $U \cap U'$ zweierlei Koordinaten zu, die wir in Anlehnung an den Tensorkalkül bzw. mit $x^\alpha, x^{\alpha'}$ bezeichnen. Da φ und φ' beide die Menge $U \cap\ U'$ bijektiv auf Teilmengen des Koordinatenraums $\mathbb{R}^n$ abbilden, sind die x^α mit den $x^{\alpha'}$ eineindeutig verknüpft; wir schreiben

$$x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^\beta), \qquad x^\alpha = f^\alpha(x^{\beta'}). \tag{39}$$

Zwei n-Karten φ, φ', die auch Koordinatensysteme genannt werden, heißen C^k-verknüpft, wenn (i) die Bildmengen $\varphi(U \cap U')$ und $\varphi'(U \cap U')$ im $\mathbb{R}^n$ offen sind und (ii) die Koordinatentransformationen (39) k-mal stetig differenzierbar - kurz C^k - sind. (k darf auch ∞ sein oder durch ω ersetzt werden; C^ω

steht für "analytisch".)

Ein C^k-Atlas für M ist eine Menge von n-Karten φ_i, die wechselseitig C^k-verknüpft sind und deren Definitionsbereiche M überdecken,

$$\bigcup_i U_i = M \tag{40}$$

Ein C^k-Atlas heißt maximal, wenn er alle Karten enthält, die mit ihm C^k-verknüpft sind. Jeder C^k-Atlas kann zu einem maximalen Atlas ergänzt werden.
Jetzt kommt die entscheidende Definition:
Eine C^k-Mannigfaltigkeit ist eine mit einem maximalen C^k-Atlas versehene Menge.

Im Folgenden schreiben wir immer M für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, ohne ein Symbol für die "differenzierbare Struktur" - den maximalen Atlas - einzuführen. Die Dimension n der Karten, also die Anzahl der Koordinaten, nennt man auch die Dimension von M.

M ist ein topologischer Raum, wenn man festsetzt: Eine Teilmenge N von M ist offen, wenn für jede Karte φ das Bild $\varphi(U \cap N)$ offen ist. (Beweis: Übung.)Danach sind insbesondere die Definitionsbereiche von Karten offen (was anfangs keinen Sinn hatte).

M heißt orientierbar, wenn es einen Atlas gibt, dessen Karten durch Koordinatentransformationen mit positiven Funktionaldeterminanten verknüpft sind.

M heißt (topologisch) abzählbar, wenn es ein abzählbares System offener Menngen gibt derart, daß jede offene Teilmenge von M als Vereinigung von Mengen diese Systems darstellbar ist.

M heißt Hausdorff separiert, wenn je zwei Punkte in zueinander fremden ("nicht überlappenden") Umgebungen liegen.

M heißt zusammenhängend, wenn M nicht in zueinander fremde, offene Mengen zerlegbar ist.

Wir betrachten künftig nur solche differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die orientierbar, abzählbar, Hausdorff separiert und zusammenhängend sind, und nennen diese abkürzend Mannigfaltigkeiten.
Wir überlassen den Lesern, folgendes zu verifizieren:
Eine offene, zusammenhängende Teilmenge N einer Mannigfaltigkeit M ist in natürlicher Weise - d.h. ohne daß zusätzliche Strukturen eingeführt werden müssen - eine Mannigfaltigkeit; dabei gilt $dimN = dimM$.
Wenn M und N zwei C^k-Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m bzw. n sind, ist die Produktmenge $M \times N$ (die Menge der Paare (p, q) mit $p \in M, q \in$

N) in natürlicher Weise eine $(m+n)$-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, die Produktmannigfaltigkeit.

Eine reellwertige Funktion f auf M bestimmt und ist bestimmt durch ihre Einschränkungen auf die Definitionsbereiche von Karten. Ist φ eine Karte mit Definitionsbereich U, so ist für $p \in U$ durch

$$f(p) = f_\varphi(x^\alpha(p)) \tag{41}$$

eine Funktion f_φ auf dem Wertebereich $\varphi(U)$ definiert, die "f auf $\varphi(U)$ als Funktion der Koordinaten x^α darstellt." Sind φ, φ' zwei Karten, so gilt für $p \in U \cap U'$

$$f_\varphi(x^\alpha(p)) = f_{\varphi'}(x^{\alpha'}(p)) \tag{42}$$

also, wenn die Koordinaten durch (39) verknüpft sind,

$$f_\varphi(x^\alpha) = f_{\varphi'}(x^{\alpha'}). \tag{43}$$

Da die Koordinatentransformationen k mal stetig differenzierbar ("C^k") sind, ist also f_φ genau dann C^k, wenn $f_{\varphi'}$ auch C^k ist. Also ist folgende Definition sinnvoll:

Eine Funktion f auf M ist k mal stetig differenzierbar, wenn die sie darstellenden Funktionen f_φ für alle Karten φ es sind.

Summen und Produkte differenzierbarer Funktionen auf M sind differenzierbar. Diese Funktionen bilden also eine kommutative Algebra mit Einselement; und durch diese Algebra ist M als differenzierbare Mannigfaltigkeit gekennzeichnet.

Von jetzt ab sollen die Ausdrücke "Funktion" und "Abbildung" sich immer auf beliebig oft differenzierbare (C^∞) solche Objekte beziehen.

Sei f eine stetige Abbildung der Mannigfaltigkeit M in die Mannigfaltigkeit N. Dann heißt f differenzierbar, wenn die Einschränkung von f auf jede Kartenumgebung U, deren Bild $f(U)$ in einer Kartenumgebung liegt, differenzierbar ist. (Entsprechend für C^k, C^ω; für uns heiße "differenzierbar" C^∞.)

Ein Diffeomorphismus $f : M \to N$ ist eine differenzierbare, bijektive Abbildung von M auf N, deren Umkehrabbildung f^{-1} auch differenzierbar ist. Wenn ein Diffeomorphismus von M auf N existiert, heißen M und N diffeomorph. ($M = N$ zugelassen.)

2.2 Vektoren und Tangentialräume

Während man in der affinen Geometrie Vektoren mit gerichteten Strecken (Pfeilen) oder Translationen identifizieren kann, ist dies in Mannigfaltigkeiten nicht möglich; denn zwei Punkte einer Mannigfaltigkeit definieren ohne eine weitere Struktur keine "geradlinige Strecke".

Einem Vektor in einem Punkt soll eine "Richtung" und eine "Größe" (ohne einen zunächst nicht vorhandenen Abstandsbegriff) zukommen. Das legt nahe, Vektoren in Analogie zur Geschwindigkeit einer Bewegung mit Hilfe von Kurven einzuführen.

Unter einer Kurve in M wird eine Abbildung σ eines offenen Intervalls von $\mathbb{R}$ nach M verstanden. Durchläuft der Parameter s das Intervall, so durchläuft der Bildpunkt $\sigma(s)$ die Kurve.

Sei f eine in einer Umgebung von $p \in M$ definierte reellwertige Funktion und σ eine durch $p = \sigma(s_0)$ gehende Kurve. Dann ist die Änderungsrate von f längs σ in p gegeben durch die Ableitung von $f(\sigma(s))$ nach s in s_0,

$$\partial_s f(\sigma(s)) \mid_{s_0} =: \dot{\sigma}_p(f) \tag{44}$$

Bei gegebener Kurve σ und gegebenem Punkt p ist jeder Funktion der Wert ihrer Richtungsableitung in p zugeordnet. Dieser Wert hängt nur von einem beliebig kleinen, p enthaltenden Stück der Kurve σ und der Einschränkung von f auf eine beliebige Umgebung von p ab. Es liegt nahe zu definieren:
Das durch (44) gegebene Funktional $f \to \dot{\sigma}_p(f)$ wird der Tangentialvektor der Kurve σ in p genannt.

Seien nun ρ, σ, τ drei durch p ghende Kurven, $\rho(r_0) = \sigma(s_0) = \tau(t_0) = p$, und sei a eine reelle Zahl. Wenn dann für alle Funktionen f die Gleichung

$$\dot{\rho}_p(f) + a\dot{\sigma}_p(f) = \dot{\tau}_p(f)$$

gilt, so schreiben wir

$$\dot{\rho}_p + a\dot{\sigma}_p = \dot{\tau}_p \tag{45}$$

Die Tangentialvektoren in p bilden also einen Vektorraum M_p, den Tangentialraum von M in p.
In einem lokalen Koordinatensystem x^α für eine Umgebung von p wird eine Kurve σ mit $p = \sigma(s_0)$ dargestellt durch

$$\sigma^\alpha(s) := x^\alpha(\sigma(s)), \tag{46}$$

und aus (44) wird

$$\dot{\sigma}_p(f) = (\partial_\alpha f_\varphi)\partial_s \sigma^\alpha \mid_{s_0} . \tag{47}$$

Darin sind die partiellen Ableitungen $\partial_\alpha f_\varphi$ nach den x^α an der Stelle $x^\alpha(p)$ zu nehmen, also von σ unabhängig. Der Vektor $\dot{\sigma}_p$ ist also in Koordinaten durch die Ableitungen

$$\partial_s \sigma^\alpha \mid_{s_0} =: \dot{\sigma}_p^\alpha \tag{48}$$

bestimmt.
Für jedes Koordinatensystem definieren die Koordinatenkurven τ_β,

$$\tau^\alpha_\beta(v) := x^\alpha(p) + v\delta^\alpha_\beta \tag{49}$$

in p Vektoren mit $\dot\tau^\alpha_{\beta,p} = \delta^\alpha_\beta$ (Kroneckersymbol). Das Funktional $f \mapsto \dot\tau_{\alpha,p}(f)$ ordnet jeder Funktion ihre partielle Ableitung $(\partial_\alpha f_\varphi)_p$ zu. Man identifiziert deshalb die Tangentialvektoren $\dot\tau_{\alpha,p}$ mit den Operatoren $\partial_\alpha|_p$Für den Tangentialvektor einer beliebigen Kurve σ in p gilt also in Komponenten nach (47) für alle f

$$\begin{aligned}\dot\sigma_p(f) &= (\partial_\alpha f_\varphi)\dot{\sigma^\alpha_p} = (\partial_\alpha f_\varphi)\dot\sigma^\beta_p\delta^\alpha_\beta\\ &= (\partial_\alpha f_\varphi)\dot\sigma^\beta_p\dot\tau^\alpha_{\beta,p}(f) = \dot\sigma^\beta_p\dot\tau_{\beta,p}(f),\end{aligned}$$

also gilt nach der Definition (45)

$$\dot\sigma_p = \dot\sigma^\alpha_p\dot\tau_{\alpha,p} = \dot\sigma^\alpha_p\partial_\alpha|_p. \tag{50}$$

Zusammenfassung: Wir haben gezeigt: Die über (44) definierten Tangentialvektoren in einem Punkt p bilden einen n-dimensionalen Vektorraum M_p, den Tangentialraum von M in p. Jedes lokale Koordinatensystem definiert via (49) eine Basis $\dot\tau_{\alpha,p}$ von M_p. Die zugehörigen Komponenten des (beliebigen) Vektors $\dot\sigma_p$ können, wie (50) zeigt, aus der Koordinatendarstellung (46) von σ mittels (48) berechnet werden.

Aus den vorangehenden Formeln und Definitionen folgt: Bei einer Koordinatentransformation (39) transformieren sich die zugehörigen Basen gemäß (2) und die Vektorkomponenten nach (3) mit

$$A^{\alpha'}{}_\alpha = \partial_\alpha f^{\alpha'}, \tag{51}$$

wobei der Wert der rechts stehenden Funktionalmatrix an der Stelle $x^\alpha(p)$ zu nehmen ist.

Wir haben die Elemente von M_p geometrisch als Tangentialvektoren von Kurven ohne Benutzung von Koordinaten eingeführt und erst danach ihre Komponenten definiert. Nicht nur wegen der Kürze, sondern auch im Hinblick auf die Physik sprechen wir künftig von Vektoren und verstehen darunter jede Größe, die sich eineindeutig einem Tangentialvektor zuordnen läßt, ob diese Größe mit einer Kurve etwas zu tun hat oder nicht.

Für das Rechnen mit Vektoren braucht man nur zu wissen, daß Vektoren relativ zu lokalen Koordinatensystemen durch Komponenten $u^\alpha, u^{\alpha'}, ...$ bestimmt sind, die sich nach (3) mit (51) transformieren und daß sich Linearkombinationen von Vektoren in Komponenten so darstellen lassen "wie gehabt" ($\rightarrow$ 1.1).

2.3 Tensorfelder

Wie gezeigt, hat eine Mannigfaltigkeit M in jedem ihrer Punkte einen Tangentialraum M_p. Auf jeden Tangentialraum sind die Begriffe und Konstruktionen aus Kapitel 1 anwendbar; in jedem Punkt p sind also außer Vektoren auch Kovektoren und Tensoren definiert. Die Kovektoren in p bilden den Kotangentialraum M_p^*.

Wenn jedem Punkt von M (oder einer offenen Teilmenge von M) ein (s/r)-Tensor zugeordnet ist, spricht man von einem Tensorfeld, gegeben durch

$$S^{\alpha_1,\ldots\alpha_s}{}_{\beta_1\ldots\beta_r}(x^\gamma).$$

(Diese Schreib-und Ausdrucksweise ist so zu verstehen, wie in 1.7 erläutert. Ergänzend verabreden wir, x^γ als Symbol für einen Punkt zu benutzen, außer wenn es auf bestimmte Koordinaten ankommt, was jeweils gesagt werden wird.)

Aus der Transformationsformel (13) und ihrer Verallgemeinerung auf $(s \mid r)$-Tensoren, in der die Transformationsmatrix durch (51) gegeben ist, folgt: Die Differenzierbarkeit der Tensorkomponenten hängt nicht vom Koordinatensystem ab, wir können und werden alle Tensorfelder als beliebig oft differenzierbar annehmen. Natürlich können alle tensoralgebraischen Operationen punktweise auf Tensorfelder angewandt werden.

Es hat keinen Sinn, Vektoren (oder Tensoren) in verschiedenen Punkten "gleich" zu nennen; Gleichheit der Komponenten ist dann keine vom Koordinatensystem unabhängige Eigenschaft. Deshalb können Tensoren in verschiedenen Punkten auch nicht addiert oder subtrahiert werden, und folglich bilden die partiellen Ableitungen der Komponenten eines Tensorfeldes nicht die Komponenten eines Tensorfeldes, mit einer Ausnahme: Die Komponenten eines Skalarfeldes (einer Funktion) ergeben bei partieller Ableitung ein Kovektorfeld, das Gradientenfeld des Skalarfeldes. Differenziert man nämlich f längs einer Kurve σ, so ist der Wert (vgl. (47)) in jedem Punkt der Kurve

$$\dot{\sigma}_p(f) = (\partial_\alpha f_\varphi)\dot{\sigma}_p^\alpha,$$

und da dies für beliebige Kurven, also beliebige $\dot{\sigma}_p^\alpha$ gilt, bilden nach der Quotientenregel (1.7) die Koeffizienten die Komponenten eines Kovektors. Dies veranlaßt dazu, eine weitere "schlampige", aber übliche Verabredung zu treffen, nämlich statt f_φ kürzer f und für den Gradienten

$$\partial_\alpha f = f_{,\alpha} \tag{52}$$

zu schreiben. Hier wie auch sonst soll $()_{,\alpha}$ dasselbe bedeuten wie ∂_α.

Für die Koordinaten x^α, die ja auch Funktionen auf M sind, ist $\partial_\beta x^\alpha = \delta^\alpha_\beta$; die Gradienten der Funktionen x^α bilden also eine Basis des Kotangentialraumes M^*_p.
Man kann sich durch Nachrechnen davon überzeugen, daß die Rotation eines Kovektorfeldes ω_α, nämlich

$$\omega_{[\alpha,\beta]}, \tag{53}$$

ein $(0 \mid 2)$-Tensorfeld ist. (Im Kalkül der Differentialformen werden (52), (53) verallgemeinert.)

Aus einem Vektorfeld kann man durch partielle Differentiation zwar kein Tensorfeld bilden, wohl aber aus zwei Vektorfeldern ein Vektorfeld: Bildet man das Skalarfeld

$$A^\beta(B^\alpha f_{,\alpha})_{,\beta} - B^\beta(A^\alpha f_{,\alpha})_{,\beta} \ ,$$

benutzt man $f_{,\alpha\beta} = f_{,\beta\alpha}$ und die Quotientenregel, so folgt:

$$A^\beta B^\alpha{}_{,\beta} - B^\beta A^\alpha{}_{,\beta} \tag{54}$$

"ist" ein Vektorfeld, genannt der Kommutator

$$[A, B] \tag{55}$$

von A und B. (Mit diesem "Produkt" bilden Vektorfelder auf M eine Liealgebra.)

2.4 Riemannsche und Lorentzsche Mannigfaltigkeiten

Unter einem metrischen Feld oder kurz einer Metrik auf einer Mannigfaltigkeit M wird ein $(0 \mid 2)$-Tensorfeld $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ verstanden, das in jedem Tangentialraum M_p von M eine nichtausgeartete Metrik im Sinne von 1.8. definiert. Es gelten dann punktweise die in 1.8. bis 1.10. besprochenen Tatsachen. Wie in 2.5 gezeigt werden wird, haben die Zahlen p, m in (25) in allen Punkten von M dieselben Werte.

Entsprechend der Definitionen in 1.10. spricht man von Riemannschen Mannigfaltigkeiten (oder Räumen), wenn die Metrik Euklidisch ist, und von Lorentzmannigfaltigkeiten, wenn $m = 1$ ist (hier, bei manchen Autoren $p = 1$). Im Lorentzschen Fall bilden die Vektoren mit $X^2 = 0$ in M_p den Nullkegel des Tangentialraums.

Wenn der Tangentenvektor einer Kurve σ ein Einheitsvektor ist, d.h. wenn

$$|g_{\alpha\beta}\dot\sigma^\alpha\dot\sigma^\beta| = 1 \tag{56}$$

gilt, wird der Kurvenparameter s als Weglänge bezeichnet. Statt (56) wird oft ohne Rücksicht auf Vorzeichen

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{57}$$

geschrieben, was nur als suggestiver Ausdruck für den metrischen Tensor zu verstehen ist.

2.5 Kovariante Ableitungen

Mit den bisher definierten Operationen ist es nicht möglich, Tensoren in verschiedenen Punkten einer Mannigfaltigkeit zu vergleichen. Um die Veränderung eines Tensorfeldes S längs einer Kurve σ zu beschreiben, benötigt man eine Ableitung von S in Richtung des Tangentenvektors $\dot{\sigma}$ der Kurve. Durch das Verschwinden dieser Ableitung ist dann auch eine Bedingung für die Parallelverschiebung von Tensoren längs Kurven gegeben. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, allgemein eine Richtungsableitung nach einem Vektorfeld einzuführen mit der folgenden

Definition: Sei X ein Vektorfeld in einer Umgebung von p. Eine Richtungsableitung ∇_X ist ein Operator, der jedem in einer Umgebung von p definierten Tensorfeld S ein Tensorfeld gleichen Grades zuordnet, $S \mapsto \nabla_X S$, mit folgenden Eigenschaften:

$$(\nabla_X S)_p = (\nabla_Y T)_p, \tag{58.1}$$

wenn X und Y und ebenso S und T in einer (beliebigen) Umgebung von p einander gleich sind. (Man sagt dafür auch, die Abbildung $S \mapsto \nabla_X S$ sei "lokal.")

$$\nabla_X (S + T) = \nabla_X S + \nabla_X T, \tag{58.2}$$

$$\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S, \tag{58.3}$$

$$\nabla_X (ST) = (\nabla_X S)T + S(\nabla_X T), \tag{58.4}$$

$$\nabla_{fX} S = f \nabla_X S, \tag{58.5}$$

$$Sp \nabla_X S = \nabla_X Sp S \tag{58.6}$$

für beliebige Verjüngungen (Sp = Spur, vgl. (18)),

$$\nabla_X f = X \cdot \nabla f \tag{58.7}$$

($\nabla f\ \equiv$ Gradient von f, vgl. (52)) Darin bedeuten X, Y Vektorfelder; S, T Tensorfelder (in (1) und (2)) solche gleichen Grades; f ein Skalarfeld.

(Die Lokalität (58.1) ist nötig, damit die anderen Eigenschaften überhaupt sinnvoll sind, obwohl die in (2) - (7) auftretenden Felder X, S, T, f, Y

nicht in ein und derselben Umgebung von p definiert zu sein brauchen. Wegen (1) kann man z.B. in (2) X, S, T auf eine gemeinsame Umgebung von p einschränken, wo dann (2) sinnvoll ist.)

Damit diese Definition nicht abschreckt, überzeuge man sich von folgendem: Definiert man für einen Koordinatenbereich U eines Koordinatensystems x^α unter Verwendung der Tensorkomponenten

$$(\nabla_X S)^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s} := S^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_s,\gamma} X^\gamma, \tag{59}$$

so sind alle Eigenschaften (1) bis (7) erfüllt. Die Operation (59) hängt aber vom Koordinatensystem ab, m.a.W. jedes Koordinatensystem definiert lokal eine andere Richtungsableitung. Zu zeigen ist. dass eine koordinatenunabhängige Richtungsableitung auf ganz M definierbar ist und wodurch eine solche Ableitung bestimmt ist.

Wir nehmen zunächst an, ∇_X sei eine Ableitung mit (1) bis (7), und leiten daraus weitere Eigenschaften her.

<u>Zuerst</u> schließen wir aus (3) und (5) mit Benutzung eines Basisfeldes e_α:

$$\nabla_X S = \nabla_{X^\alpha e_\alpha} S = X^\alpha \nabla_{e_\alpha} S.$$

Also hängt $(\nabla_X S)_p$ vom Vektorfeld X nur über die Komponenten X_p^α ab. Daraus folgt weiter, dass etwa für ein $(1 \mid 1)$-Tensorfeld S punktweise gilt

$$(\nabla_X S)(Z, \omega) = S^\alpha{}_{\beta;\gamma} Z^\beta \omega_\alpha X^\gamma. \tag{60}$$

Wir können also (nicht nur an diesem Beispiel, sondern allgemein) statt ∇_X auch einen <u>Operator</u> ∇ einführen, der aus jedem $(s \mid r)$-Tensorfeld S ein $(s|r+1)$-Tensorfeld ∇S macht,

$$(\nabla S)(..., X) := (\nabla_X S)(...). \tag{61}$$

Wir verabreden also, dass das zusätzliche Vektorargument in ∇S an die früheren Argumente "angehängt" werden soll. In Komponentenschreibweise deuten wir die <u>kovariante Ableitung</u> ∇ durch ein Semikolon vor dem zusätzlichen Index an, wie in (60). Die Komponenten von ∇S schreiben wir also allgemein

$$S^{\alpha_1\ldots\alpha_s}{}_{\beta_1\ldots\beta_r;\gamma}. \tag{62}$$

Von jetzt ab arbeiten wir mit ∇ statt mit ∇_X und werten die invarianten Eigenschaften (1)-(7) mit der Komponentendarstellung aus.

Zweitens werten wir (7) und (6) mit $f = \omega_\alpha Y^\alpha$ aus:

$$(\omega_\alpha Y^\alpha)_{;\beta} = (\omega_\alpha Y^\alpha)_{,\beta}\,,$$

$$(\omega_\alpha Y^\alpha)_{;\beta} = \omega_{\alpha;\beta} Y^\alpha + \omega_\alpha Y^\alpha{}_{;\beta},$$

$$(\omega_\alpha Y^\alpha)_{,\beta} = \omega_{\alpha,\beta} Y^\alpha + \omega_\alpha Y^\alpha{}_{,\beta},$$

also

$$(X^\alpha{}_{;\beta} - X^\alpha{}_{,\beta})\omega_\alpha = -(\omega_{\alpha;\beta} - \omega_{\alpha,\beta})X^\alpha.$$

Die rechte Seite hängt punktweise von X ab, also auch die linke Seite. Es gibt also vom Koordinatensystem und von ∇ abhängige Funktionen $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ mit $f = \omega_\alpha Y^\alpha$ aus:

$$X^\alpha{}_{;\beta} - X^\alpha{}_{,\beta} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} X^\gamma \tag{63}$$

und analog

$$\omega_{\alpha;\beta} - \omega_{\alpha,\beta} = \gamma^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma. \tag{64}$$

Einsetzen von (63) und (64) in die vorangehende Gleichung ergibt

$$\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\omega_\alpha X^\gamma = -\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} X^\alpha \omega_\gamma.$$

Da dies für beliebige ω_α, X^γ gilt, folgt (Umbenennung der Summationsindizes rechts, $\gamma \to \alpha, \alpha \to \gamma$):

$$\gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

Wir ersetzen deshalb γ durch $-\Gamma$ und notieren

$$X^\alpha{}_{;\beta} = X^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} X^\gamma, \tag{65}$$

$$\omega_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\omega_\gamma. \tag{66}$$

Drittens erhalten wir aus (2) und (4) für ein spezielles Tensorfeld $S^\alpha{}_\beta = Y^\alpha \omega_\beta$:

$$S^\alpha{}_{\beta;\gamma} = Y^\alpha{}_{;\gamma}\omega_\beta + Y^\alpha \omega_{\beta;\gamma},$$

also mit (65), (66)

$$S^\alpha{}_{\beta;\gamma} = S^\alpha{}_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\gamma} S^\delta{}_\beta - \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} S^\alpha{}_\delta. \tag{67}$$

Wegen des Hilfssatzes am Ende von 1.4 gilt (67) für jedes (1|1)-Tensorfeld, und eine entsprechende Formel gilt für $(s|r)$-Tensorfelder. (Werte Produkte $Y^\alpha, Z^\beta ... \omega_\gamma ...$ aus und ziehe wieder den Hilfssatz heran.)
Ein weiteres Beispiel sollte die Berechnung kovarianter Ableitungen im allgemeinen Fall klar machen:

$$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\delta} = T^{\alpha\beta}{}_{\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\delta} T^{\varepsilon\beta}{}_\gamma + \Gamma^\beta{}_{\varepsilon\delta} T^{\alpha\varepsilon}{}_\gamma - \Gamma^\varepsilon{}_{\gamma\delta} T^{\alpha\beta}{}_\varepsilon. \tag{67'}$$

Damit haben wir die definierenden Eigenschafte (58.1)-(58.7) fast "ausgeschlachtet"; wenn ∇ und ∇_X in Koordinaten durch (67') und (61) definiert werden, sind alle Forderungen erfüllt. Eine kovariante Ableitung ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M ist demnach in lokalen Koordinaten durch ein Funktionensystem $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x^\delta)$ bestimmt, die wir die Komponenten von ∇ in dem betreffenden Koordinatensystem nennen. Wir müssen aber noch ermittelnm wie die Γ's zweier Koordinatensysteme miteinander zusammenhängen - deshalb oben die Einschränkung "fast".

Das Transformationsgesetz für die Γ's ergibt sich daraus, dass sich die aus (61), (65) zu entnehmenden Komponenten von $\nabla_X Y$,

$$(Y^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} Y^\gamma) X^\beta,$$

wie die Komponenten X^α, Y^β selbst transformieren. Die Rechnung ergibt (Übung!)

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \right). \tag{68}$$

Das bestätigt, was wir schon wußten, nämlich dass die Komponenten von ∇ keine Tensorkomponenten sind. Um eine kovariante Ableitung auf M zu definieren, müssen für die Karten eines Atlas' Funktionen $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x^\delta), \Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}(x^{\delta'}), ...$ so gewählt werden, dass in den Überlappungsbereichen der Karten die Gleichungen (68) gelten. Für die in 2.1 definierten Mannigfaltigkeiten ist das immer möglich, was hier nicht bewiesen wird. Für die uns interessierenden Anwendungen werden die Γ's in 2.7 aus einer Metrik abgeleitet werden.

Aus (68) folgt ohne Rechnung: a) Zwei kovariante Ableitungen $\nabla, \overline{\nabla}$ auf M bestimmen einen Differenztensor mit den Komponenten $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \overline{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} = D^\alpha{}_{\beta\gamma}$.
b) Ist $\overline{\nabla}$ eine kovariante Ableitung und D ein (1|2)-Tensorfeld, so definiert

$\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ eine kovariante Ableitung ∇, die Summe von $\overline{\nabla}$ und D, und so können aus einer Ableitung $\overline{\nabla}$ alle anderen erhalten werden.
c) Sind ∇_i kovariante Ableitungen mit Komponenten Γ_i und f_i Funktionen auf M mit $\sum_i f_i = I$, so definiert $\sum_i f_i \Gamma_i$ eine kovariante Ableitung $\nabla = \sum_i f_i \nabla_i$.
d) Wenn ∇ die Komponenten $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ hat, so definieren ${}'\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} := \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ eine Ableitung ∇'.

Aus den Bemerkungen a) und d) folgt weiter:
Jede kovariante Ableitung ∇ definiert einen Tensor T mit den Komponenten

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} := 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\gamma\beta]}, \tag{69}$$

genannt Torsionstensor von ∇. Durch Rechnung ist leicht zu bestätigen, dass (69) äquivalent ist zu

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{70}$$

∇ heißt symmetrisch oder torsionsfrei, wenn sein Torsionstensor der Nulltensor ist oder, gleichwertig, wenn für die Komponenten von Γ gilt:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]} = 0 \tag{71}$$

Eine andere, zu (71) äquivalente Eigenschaft ist, dass für eine Funktion f (einen "Skalar") der Tensor $\nabla\nabla f$ symmetrisch ist,

$$f_{[;\alpha;\beta]} = 0. \tag{72}$$

(Mit (66) für $\omega_\alpha = f_{,\alpha}$ nachzurechnen.)

Schließlich entnehmen wir aus (68) (Übung): Bei gegebener kovarianter Ableitung ∇ gibt es zu jedem Punkt p von M ein Koordinatensystem, für das in p alle Komponenten Γ gleich Null sind, wenn ∇ symmetrisch ist. Solche Koordinaten werden in p geodätisch genannt.

Statt der Bezeichnung (62) für die Komponenten von ∇S wird von manchen Autoren die Notation

$$\nabla_\gamma S^{\alpha_1 \dots}{}_{\beta_1 \dots} \tag{62'}$$

bevorzugt. Beim Wechsel der Schreibweise ist zu beachten, dass der Ableitungsindex in (62) "angehängt" wird, in (62') "vorangestellt" wird.

2.6 Parallelverschiebung und Geodätische

Auf der Mannigfaltigkeit M sei ein (nicht notwendig symmetrischer) Ableitungsoperator ∇ gegeben. Dann soll ein Vektorfeld X längs einer Kurve parallel genannt werden, wenn in allen Punkten der Kurve die Richtungsableitung

$$\nabla_s X := \nabla_{\dot\sigma} X = \dot\sigma \cdot \nabla X = 0 \tag{73}$$

ist, in Komponenten

$$\nabla_s X^\alpha = \partial_s X^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} X^\beta \dot\sigma^\gamma = 0. \tag{73'}$$

Die letzte Formel zeigt, dass Parallelität längs σ auch sinnvoll ist, wenn X^α nur längs σ definiert, also kein Vektorfeld auf M ist.

Bei gegebener Kurve ist (73') ist ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die $X^\alpha(s)$. Nach Standardsätzen gibt es also zu Anfangswerten $X^\alpha(s_1)$ genau eine Lösung $X^\alpha(s)$ von (73'), zu Linearkombinationen der Anfangswerte gehören die entsprechenden Linearkombinationen der Lösungen, und $X^\alpha(s_2) = 0$ gilt genau dann, wenn $X^\alpha(s_1) = 0$ ist. Geometrisch bedeutet das: Die Parallelverschiebung längs einer Kurve σ von $p = \sigma(s_1)$ nach $q = \sigma(s_2)$ definiert einen Vektorraum-Isomorphismus des Tangentialraums M_p auf M_q.

Allgemein wird durch

$$\nabla_s S := \nabla_{\dot\sigma} S = 0 \tag{74}$$

die Parallelität eines $(s|r)$-Tensors längs σ definiert; die entsprechende Parallelverschiebung bildet die zu M_p gehörende Tensoralgebra isomorph auf die in M_q ab.

Die Parallelverschiebungen hängen i.a. nicht nur von den Punkten p, q, sondern von der Verbindungskurve σ ab; darauf gehen wir in 2.8 ein.

Ein Ableitungsoperator ∇ setzt also via (74) die Tensoren in verschiedenen Punkten zueinander in Beziehung; man spricht daher auch von einem durch ∇ oder die Γ's gegebenen linearen Zusammenhang (speziell einem symmetrischen linearen Zusammenhang).

Ein Kurve σ heißt geodätisch, wenn ihr Tangentenvektor $\dot\sigma$ längs σ parallel ist, $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$, in Komponenten

$$\partial_s \dot\sigma^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \dot\sigma^\beta \dot\sigma^\gamma = 0 \tag{75}$$

Dafür schreibt man auch oft, indem man Kurven durch $x^\alpha(s)$ symbolisiert und $\partial_s \equiv ()^\cdot$ setzt,

$$\ddot x^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \dot x^\beta \dot x^\gamma = 0. \tag{75'}$$

Dies ist ein (in x^α und $\dot{x}^\alpha$) nichtlineares Differentialgleichungssystem für die $x^\alpha(s)$. Zu einem Anfangspunkt $x^\alpha(s_0)$ und einem Anfangstangentenvektor $\dot{x}^\alpha(s_0)$ gibt es also genau eine Lösungskurve mit maximalem Intervall $a < s < b (a < s_0 < b)$, wobei a, b endlich oder unendlich sein können (auch wenn die Kurve durch mehrere Kartenbereiche läuft, was i.a. der Fall sein wird.)

Sei $\sigma = (\sigma^\alpha(s))$ eine Geodätische. Dann ist die "umparametrisierte" Kurve $\tau(t) = \sigma(s(t))$ genau dann eine Geodätische, wenn die Parametertransformation $t \mapsto s(t)$ affin ist, d.h. $s = at + b$ mit reellen Konstanten $a, b; a \neq 0$. Geodätische mit demselben Bild (= Wertebereich) in M definieren also für Teile dieses Bildes Längenverhältnisse.
M heißt bezüglich ∇ <u>affin vollständig</u>, wenn alle Geodätischen in beiden Richtungen "unendlich lang" sind, gemessen in ihren affinen Parametern, also in obiger Notation $a = -\infty, b = +\infty$ ist.
Symmetrische lineare Zusammenhänge werden oft auch affine Zusammenhänge genannt.

2.7 Metrische Ableitung, metrischer Zusammenhang

$g_{\alpha\beta}$ sei eine (nichtausgeartete) Metrik auf M. Eine kovariante Ableitung auf ∇ heißt <u>metrisch</u>, wenn die durch ∇ bestimmte Parallelverschiebung Innenprodukte von Vektoren ungeändert läßt, wenn also aus $\nabla_s u^\alpha = 0, \nabla_s v^\alpha = 0$ längs einer beliebigen Kurve σ folgt

$$\nabla_s (g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) = 0.$$

Das ergibt, dass für beliebige Vektoren $u^\alpha, v^\alpha, \dot{\sigma}^\alpha$ gilt

$$u^\alpha v^\beta \nabla_s g_{\alpha\beta} = u^\alpha v^\beta \dot{\sigma}^\gamma g_{\alpha\beta;\gamma} = 0.$$

∇ ist also metrisch genau dann, wenn

$$0 = g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} g_{\delta\beta} - \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} \tag{76}$$

Wir setzen künftig voraus, dass ∇ (i.e., $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$) symmetrisch ist, und schreiben zur Abkürzung

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := g_{\alpha\delta} \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma}.$$

Die Gleichungen (76),

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} \tag{77}$$

haben wegen $\Gamma_{\alpha[\beta\gamma]} = 0$ die (einzige) Lösung

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}).$$

Zum Beweis addiere man zu (77) die entsprechende Gleichung mit zyklisch vertauschten Indizes $\alpha\beta\gamma \to \beta\gamma\alpha$ etc. und subtrahiere daraufhin die entsprechende Gleichung mit nochmals zyklisch vertauschten Indizes. Heben des ersten Index' ergibt

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}). \tag{78}$$

Zu einer Metrik gibt es also höchstens einen symmetrischen, linearen, metrischen Zusammenhang, dessen Komponenten durch (78) gegeben sind. Die durch (78) gegebenen Größen, die auch <u>Christoffelsymbole</u> genannt werden, definieren tatsächlich einen Zusammenhang; denn sie transformieren sich infolge des Transformationsgesetzes für die metrischen Komponenten $g_{\alpha\beta}$ nach dem Gesetz (68). Also gehört zu einer Metrik genau ein symmetrischer, linearer Zusammenhang.

Wir überlassen es den Leser(inne)n, sich davon zu überzeugen, dass die Geodätengleichungen zu (78) die Euler-Lagrange-Gleichungen zu der Lagrangefunktion

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \tag{79}$$

sind.

Da der Tangentenvektor $\dot{x}^\alpha$ einer Geodätischen σ parallel längs σ ist, ist der Betrag von $\dot{x}^\alpha$ bei metrischem Zusammenhang längs σ konstant, also

$$L = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = const. \tag{80}$$

Unter allen Kurven, die die Bedingung (80) mit $L \neq 0$ erfüllen, sind die Geodätischen gekennzeichnet durch das Variationsprinzip

$$\delta \int \sqrt{|g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta|}ds = 0 \tag{81}$$

das die Stationarität der Weglänge ausdrückt.

2.8 Krümmung

In diesem Abschnitt setzen wir nur voraus, daß ∇ ein symmetrischer Ableitungsoperator auf M ist, ohne eine Metrik anzunehmen.

Bevor wir den Krümmungsbegriff geometrisch besprechen, führen wir den Krümmungstensor analytisch ein. Wir bilden die zweite kovariante Ableitung eines Vektors,

$$v^\alpha{}_{;\beta;\gamma} = v^\alpha{}_{;\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\gamma} v^\delta{}_{;\beta} - \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} v^\alpha{}_{;\delta},$$

setzen darin den Ausdruck (65) ein und bilden den bezüglich β, γ schiefsymmetrischen Teil. Das Ergebnis ist

$$v^\alpha{}_{[;\beta;\gamma]} = -\frac{1}{2} R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} v^\delta \tag{82}$$

mit

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 2(\Gamma^\alpha{}_{\beta[\delta,\gamma]} + \Gamma^\varepsilon{}_{\beta[\delta}\Gamma^\alpha{}_{\gamma]\varepsilon}). \tag{83}$$

Da in (82) links ein Tensor und rechts ein beliebiger Vektor v^γ steht, folgt nach der Quotientenregel, dass $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ ein (1|3)-Tensorfeld ist, der <u>Krümmungstensor</u> von ∇. (Aus dem nicht-tensoriellen Objekt Γ entsteht durch die nicht kovariante Operation $\partial_\alpha = (...)_{,\alpha}$ ein Tensor.)

Aus (83) und der Symmetrie der Γ's ist abzulesen, dass gilt:

$$R^\alpha{}_{\beta(\gamma\delta)} = 0, \qquad\qquad R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0. \tag{84}$$

Außerdem gilt die <u>Bianchi-Identität</u>

$$R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta;\varepsilon]} = 0. \tag{85}$$

Beweis: Da dies eine Tensorgleichung ist, genügt es, sie in einem (beliebigen Punkt) p in einem geeigneten Koordinatensystem zu bestätigen. Wir nehmen Koordinaten, die in p geodätisch sind, $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(p) = 0$. Dann reduziert sich die behauptete Gleichung in p auf $R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta,\varepsilon]} = 0$, und bei Differentiation von (83) in p erhalten wir $\Gamma^\alpha{}_{\beta[\delta,\gamma\varepsilon]} = 0$ wegen der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen. Eine analoge Argumentation wird oft angewandt, um Rechnungen zu verkürzen.

(Die beim Übergang von einem flachen Raum zu einem gekrümmten Raum auftretende Nichtvertauschbarkeit der kovarianten Ableitungen, $\nabla_\alpha\nabla_\beta \neq \nabla_\beta\nabla_\alpha$, ist formal analog zu der bei Quantisierung auftretenden Nichtvertauschbarkeit von Koordinaten - und Impulsoperatoren.)

Um die Rolle von $R^{\cdot}{}_{\cdots}$ als "Krümmung" zu verstehen, verallgemeinern wir zuerst die Vertauschungsregel (82) auf beliebige Richtungsableitungen. Sei σ eine (wie immer unendlich oft differenzierbare) Abbildung eines $\mathbb{R}^2$-Internvalls in M:

$$a \leq u \leq b, \; c \leq v \leq d, \; \sigma(u, v) \in M,$$

in Koordinaten gegeben durch $\sigma^\alpha(u,v)$. Für jeden festen Wert von v definiert $\sigma(u,v)$ eine "u-Kurve" mit Tangentenvektor $U^\alpha = \partial_u\sigma^\alpha$, für festes u entsprechend eine v-Kurve mit $V^\alpha = \partial_v\sigma^\alpha$. (Wir lassen zu, dass einige u-Kurven oder v-Kurven zu Punkten entarten; das Bild von σ in M darf sich auch überschneiden oder berühren.) Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Richtungsableitungen von U^α und V^α

$$\nabla_v U^\alpha = \partial_v\partial_u\sigma^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}U^\beta V^\gamma = \nabla_u V^\alpha. \tag{86}$$

Sei weiter $W^\alpha(u,v)$ ein "Vektorfeld über σ", d.h. W^α sei ein Vektor in $\sigma(u,v)$, differenzierbar in (u,v) dann gilt:

$$(\nabla_u\nabla_v - \nabla_v\nabla_u)W^\alpha = R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma}W^\delta U^\beta V^\gamma. \tag{87}$$

Dies ist leicht nachzurechnen mit in irgend einem in $p = \sigma(u_0 v_0)$ geodätischen Koordinatensystem, wie oben im Beweis von (85).

Als Anwendung von (87) nehmen wir die u-Kurven geodätisch, $\nabla_u U^\alpha = 0$, und setzen $W^\alpha = U^\alpha$. Wir erhalten

$$\nabla_u\nabla_v U^\alpha = R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma}U^\delta U^\beta V^\gamma$$

und wegen (86)

$$\nabla_u\nabla_u V^\alpha = R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma}U^\delta U^\beta V^\gamma \tag{88}$$

Hierin kannV^α bis auf einen "kleinen" konstanten Faktor als Verbindungsvektor der Geodätischen $v = \text{const.}$ mit der "Nachbargeodätischen" $v+\varepsilon$ veranschaulicht werden wegen $\sigma^\alpha(u,v) - \sigma^\alpha(u,v+\varepsilon) \approx \varepsilon V^\alpha$. Gleichung (88) drückt also aus, daß der Verbindungsvektor "benachbarter" Geodätischen i.a. keine lineare Form des affinen Parameters der "ersten" Geodätischen ist, im Gegensatz zur "gewöhnlichen" Geometrie; dies kann als Kennzeichen für Krümmung genommen werden. (Man denke an Längenkreise auf einem Globus.)

Die wichtige Gleichung (88) heißt <u>Gleichung der geodätischen Abweichung</u> oder <u>Jacobigleichung</u>; die Lösungen V^α längs einer u-Geodätischen nennt man <u>Jacobifelder</u>.

Die Jacobigleichung läßt vermuten, dass die affinen Räume der elementaren analytischen Geometrie durch das Verschwinden des Krümmungstensors gekennzeichnet sind. Das ist lokal richtig - wie gleich zu zeigen ist.

Eine Mannigfaltigkeit M mit symmetrischem linearem Zusammenhang ∇ heißt <u>flach</u>, wenn es zu jedem Punkt p von M eine Umgebung U gibt, in der die Parallelverschiebung von Vektoren wegunabhängig ist. Dann gilt der **Satz:** (M, ∇) ist genau dann flach, a) wenn es zu jedem Punkt eine Koordinatenumgebung gibt mit $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, b) wenn $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 0$ ist

Beweis: Sei (M, ∇) flach und die Parallelverschiebung von Vektoren in U wegunabhängig. Dann definiert jeder Vektor v^α_p in p durch Parallelverschiebung längs beliebiger Kurven in U ein Vektorfeld v^α mit $v^\alpha{}_{;\beta} = 0$.
Das totale Differentialgleichungssystem

$$v^\alpha{}_{,\beta} = -\Gamma^\alpha{}_{\delta\beta} v^\delta \tag{89}$$

ist also zu beliebigen Anfangswerten (x^α, v^α) lösbar, also gilt wegen $v^\alpha{}_{,\beta,\gamma} = v^\alpha{}_{,\gamma,\beta}$ und

$$v^\alpha{}_{,\beta,\gamma} = -\Gamma^\alpha{}_{\delta\beta} v^\delta{}_{,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\beta,\gamma} v^\delta = \Gamma^\alpha{}_{\delta\beta} \Gamma^\delta{}_{\varepsilon\gamma} v^\varepsilon - \Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\beta,\gamma} v^\varepsilon$$

die Integrabilitätsbedingung $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 0$, und umgekehrt garantiert diese Bedingung die Lösbarkeit von (83) und damit die Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung. Man rechnet leicht nach, daß die Integrabilitätsbedingung für

$$\omega_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \omega_\gamma = 0 \tag{90}$$

ebenfalls $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 0$ ist. Ist diese erfüllt, so kann man also (90) lösen mit Anfangswerten $\omega^{(\alpha)}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ in p. Die Lösungen $\omega^{(\alpha)}_\beta$ erfüllen

$$\omega^{(\alpha)}{}_{\beta;\gamma} = 0, \text{also } \omega^{(\alpha)}{}_{[\beta;\gamma]} = \omega^{(\alpha)}{}_{[\beta,\gamma]} = 0,$$

also gibt es Funktionen $x^{(\alpha)}$ mit $\omega^{(\alpha)}{}_\beta = x^{(\alpha)}{}_{,\beta}$. Wegen $\omega^{(\alpha)}{}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ sind diese Funktionen in einer Umgebung von p unabhängig, können also als neue Koordinaten $x^{\alpha'} = x^{(\alpha)}$ genommen werden. In diesen neuen Koordinaten gilt dann $\omega^{(\alpha)}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}{}_{\beta'}$ und $\omega^{(\alpha)}{}_{\beta';\gamma'} = -\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = 0$. Die Umkehrung $-\Gamma^{\cdot}{}_{\cdot\cdot} = 0 \Rightarrow R^{\cdot}{}_{\cdots} = 0$, ist wegen (83) trivial.

Als <u>Zusatz</u> sei erwähnt: Die Flachheit ist auch damit äquivalent, daß die Parallelverschiebung längs solcher Kurven, die sich ineinander deformieren lassen, gleich sind.

Mit diesem Satz (besonders dem Zusatz) ist neben der nach (88) besprochenen Eigenschaft eine zweite geometrische Interpretation von "Krümmung" gegeben: Krümmung bedeutet Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung von einem Punkt p nach einem anderen Punkt q.
Als Ergänzung zu (82) erwähnen wir:

Für jeden symmetrischen $(0|2)$-Tensor $h_{\alpha\beta}$ gilt:

$$h_{\alpha\beta_{[;\gamma;\delta]}} = h_{\varepsilon(\alpha} R^\varepsilon{}_{\beta)\gamma\delta}. \tag{91}$$

(Zum Beweis ist es bequem, zuerst $h_{\alpha\beta} = \omega_\alpha \omega_\beta$ zu nehmen und dann den Hilfssatz aus 1.4 anzuwenden.)

2.9 Metrische Krümmung

Jetzt werde angenommen, M sei mit einer (nicht ausgearteten) Metrik $g_{\alpha\beta}$ versehen und ∇ sei der zugehörige metrische, symmetrische Zusammenhang und $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ dessen Krümmungstensor. Dann gelten natürlich alle Aussagen aus 2.8. Zusätzlich ergibt sich aus (91), angewandt auf $g_{\alpha\beta}$, die Symmetrie

$$R_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0. \tag{92}$$

Daraus und aus (84) folgt noch (Übung)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{93}$$

Aus den Symmetrien von $R...$ folgt für $dimM = n = 4$, dass der Krümmungstensor 20 unabhängige Komponenten hat, für $n = 2$ nur 6 und für $n = 1$ nur eine. (Allgemein $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$.)

Wegen (77) gilt in einem Punkt p in einem Koordinatensystem x^{α} die Gleichung $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ genau dann, wenn $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$ ist. Es gibt also zu einem Punkt p immer ein Koordinatensystem, das in p orthonormal und geodätisch ist. (Man macht zunächst $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ in p und erreicht daraufhin durch lineare Transformation die diagonale Normalform (25)in p.)

Aus dem Satz in 2.8 folgt: Es gibt in M zu jedem Punkt eine Umgebung U mit orthonormalen Koordinaten, so dass also in U die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ ihre Normalform (25) annehmen, genau dann, wenn der Krümmungstensor auf M überall Null ist; $(M, g_{\alpha\beta})$ heißt dann lokal flach. Wenn das der Fall ist und M einfach zusamenhängt, gibt es sogar ein globales orthonormales Koordinatensyystem; der Raum wird dann global flach genannt.

Abschließend definieren wir durch

$$R_{\alpha\beta} := R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta} \tag{94}$$

den Riccitensor, durch

$$R := R^{\alpha}{}_{\alpha} (= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \tag{95}$$

den Ricciskalar und durch

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \tag{96}$$

den Einsteintensor.

Wegen (93) sind Ricci- und Einsteintensor symmetrisch, und aus der Bianchi-Identität (85) folgt durch zweifache Spurbildung die Divergenz-Identität

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{97}$$

Sie spielt in der allegemeinen Relativitätstheorie eine große Rolle.

3 Übungen und Zusätze

Die folgenden Aussagen ergeben sich leicht aus den im Text beschriebenen Sachverhalten. Sie können zum Einüben der Begriffe dienen und ergänzen den Text. Die unter (m.n) aufgeführten Aussagen machen vom Text bis einschließlich Abschnitt m.n Gebrauch.

1.1
- Die rellen homogenen Polynome dritten Grades in $\mathbb{R}^3$ bilden einen Vektorraum P. $dimP =\ ?$
- Die hermitischen (2×2)-Matrizen bilden einen reellen Vektorraum H. $dimH =\ ?$

1.2
- Beschreiben Sie den Dualraum von H.

1.5
- In der Mechanik ausgedehnter Körper und der Elektrodynamik kommen Tensoren und tensoralgebraische Gleichungen vor. Beispiele?

1.6
- Sei $A_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{[\gamma\delta][\alpha\beta]}$. Dann ist $A_{[\alpha\beta\gamma\delta]} = A_{\alpha[\beta\gamma\delta]}$.
- Sei $n = 4$ und $F_{(\alpha\beta)} = 0$. Dann ist $F_{\alpha\beta}$ darstellbar als $F_{\alpha\beta} = A_{[\alpha}B_{\beta]}$ genau dann, wenn $F_{\alpha[\beta}F_{\gamma\delta]} = 0$ ist.

1.9
- Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ ist $\vec{a} = \vec{b}\times\vec{c}$ eine andere Schreibweise für $a^i = \eta^i{}_{jk}b^jc^k$ ($\eta =$ Volumentensor der euklidischen Metrik.)
- Sei V ein $n{-}dim$. Vektorraum mit Metrik $g_{\alpha\beta}$ und einem zugehörigen Volumentensor η. Dann hat η bezüglich einer beliebigen orientierten Bais die Komponenten $\eta_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = |det(g_{\alpha\beta})|^{\frac{1}{2}}\times$. (Vorzeichen der Permutation $(12\ldots n)\mapsto(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$.

1.10
- Gilt in einem Vektorraum mit Minkowskimetrik für raumartige Vektoren A, B, d.h. für $A^2 > 0, B^2 > 0$, die Ungleichung $|A{+}B| \leq |A| + |B|$?

2.1
- Das Intervall $0 < x < 1$ ist als Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $\mathbb{R}$.
- Wenn M diffeomorph zu N ist, gilt $dimM = dimN$.
- Eine differenzierbare Mannigkfaltigkeit hat einen Atlas mit abzählbar vielen Karten.
- Auf der 2-Sphäre $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ gibt es einen Atlas mit 2 Karten.

2.2
- In einer Mannigfaltigkeit lassen sich je zwei Punkte durch eine Kurve verbinden.

2.3 • Sei $\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \varphi_{[\alpha_1\dots\alpha_p]}$ein Tensorfeld. Dann ist $\varphi_{[\alpha_1\dots\alpha_p,\alpha_{p+1}]}$ auch ein Tensorfeld. $((),_\alpha = \partial_\alpha)$

2.4 • Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Metrik $g_{\alpha\beta}$ und $g := |det(g_{\alpha\beta})|$. Dann ist ${}_X\int \sqrt{g}\; d^n x$ vom Koordinatensystem unabhängig. (X sei ein kompakter Bereich von M, der natürlich mit verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben werden kann. Volumen von X.

2.7 • Sei $\sigma : s \mapsto \sigma(s)$ eine Nullgeodätische im Lorentzraum (M, g), d.h. $\dot{\sigma}^2 = 0$. Dann ist $\tilde{\sigma} : \tilde{s} \mapsto \sigma(s[\tilde{s}])$ mit $s := \int \Omega^{-1} d\tilde{s}$ eine Nullgeodätische bezüglich der konform reskalienten Metrik $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}$.

2.9 • Für den Krümmungstensor einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Metrik $g_{\alpha\beta}$ gilt
für $n = 2 : R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 2K\delta^\alpha_{[\gamma} g_{\delta]\beta}$, $(\Rightarrow R_{\alpha\beta} = K g_{\alpha\beta})$
(K heißt Gaußkrümmung);
für $n = 3 : R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 4\delta^{[\alpha}_{[\gamma} R^{\beta]}_{\delta]} - R\delta^\alpha_{[\gamma}\delta^\beta_{\delta]}$.

• Auf $\mathbb{R}^2$ (als Mannigfaltigkeit) gibt es eine Metrik g konstanter Krümmung $K = 1$. Ist $(\mathbb{R}^2, g)$ affin vollständig?

• auf $\mathbb{S}^2$ existiert keine flache Metrik.

• Sei $n = 4$ und $(M, g_{\alpha\beta})$ Lorentzsch. Es werde gesetzt
${}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\gamma\delta}$ (Linksdual),
$R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\lambda\mu}\eta^{\lambda\mu}{}_{\gamma\delta}$ (Rechtsdual).
Dann läßt sich $R_{....}$ eindeutig zerlegen, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ mit
${}^*C_{....} = C^*_{....}$, ${}^*E_{....} = -E^*_{....}$
$E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist tensoralgebraisch darstellbar durch $g_{\alpha\beta}$ und $R_{\alpha\beta}$.

• Für den soeben definierten Weyltensor $C_{....}$ gilt: $C^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ ändert sich nicht bei konformer Reskalierung der Metrik, $g_{\alpha\beta} \mapsto \Omega^2 g_{\alpha\beta}$.

Frohes Schaffen!!