

Jürgen-Ehlers-Frühjahrsschule „Gravitationsphysik“ 2010

Vorlesung

Schwarze Löcher und Neutronensterne

Inhaltsverzeichnis

1	Schwarze Löcher: Schwarzschild- und Kerr-Raumzeit	2
1.1	Randwertprobleme für axialsymmetrisch, stationäre Raumzeiten	2
1.2	Das lineare Problem im statischen Fall	4
1.3	Ergebnisse	5
1.4	Diskussion der Kerr-Lösung	6
1.5	Die Ergosphäre	7
2	Das Cauchy-Problem in der ART	9
2.1	Einführungsbeispiel: klassische Elektrodynamik	9
2.2	Blätterung der Raumzeit	9
2.3	Die ADM-Gleichungen (Arnowitt, Deser, Misner 1962)	11
3	Einfache Neutronensternmodelle: sphärisch-symmetrische Sterne	14
3.1	Linielement und Energie-Impuls-Tensor	14
3.2	Feldgleichungen	14
3.3	Die TOV-Gleichung	15
3.4	Die innere Schwarzschild-Lösung	16
3.5	Allgemeine Zustandsgleichung	18
3.6	Die Buchdahl-Grenze im allgemeinen Fall	18
4	Der sphärisch-symmetrische Gravitationskollaps	20
4.1	Linielement und Energie-Impuls-Tensor	20
4.2	Feldgleichungen	21
4.3	Oppenheimer-Snyder-Kollaps	22

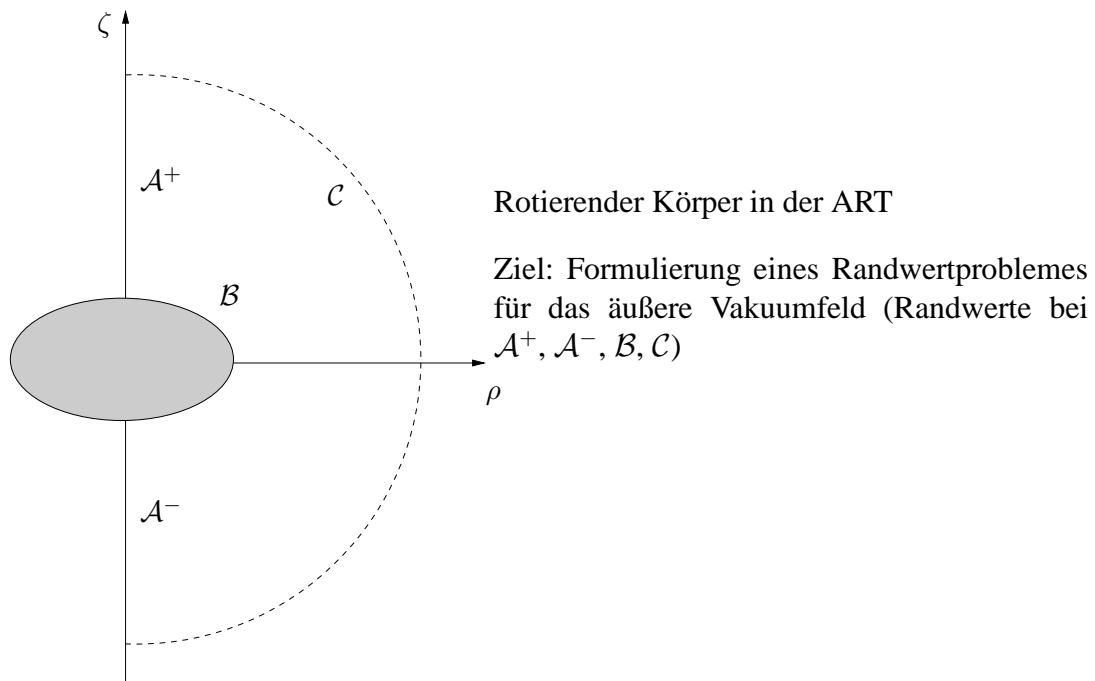
1 Schwarze Löcher: Schwarzschild- und Kerr-Raumzeit

1.1 Randwertprobleme für axialsymmetrisch, stationäre Raumzeiten

- 2 Symmetrien: Stationarität und Axialsymmetrie \Rightarrow 2 Killing-Vektoren:
 ξ^a : „Metrik unabhängig von Zeit t “
 η^a : „Metrik unabhängig vom Winkel φ “
 (statische Raumzeit, z.B. Schwarzschild: ξ^a orthogonal zu Hyperflächen konstanter Zeit)
- Weyl-Lewis-Papapetrou Koordinaten (Zylinderkoordinaten ρ, ζ, φ, t):

$$ds^2 = e^{-2U} [e^{2k} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\varphi^2] - e^{2U} (dt + a d\varphi)^2, \quad \xi^a = \delta_t^a, \quad \eta^a = \delta_\varphi^a$$

U, k, a, W hängen nur von ρ und ζ ab
 (statische Raumzeit: $a \equiv 0$)



- im Vakuumgebiet: W genügt Einstein-Gleichung

$$W_{,\rho\rho} + W_{,\zeta\zeta} = 0$$

\rightarrow man kann $W = \rho$ durch ρ - ζ -Koordinatentransformation erreichen

$$(\Delta W = 0 \Rightarrow W = F(\rho + i\zeta) + G(\rho - i\zeta))$$

$$W \text{ reel} \Rightarrow G = \bar{F}$$

$$\text{Koordinatentransformation: } \rho' + i\zeta' = 2F(\rho + i\zeta) \Rightarrow W = \rho'$$

- Vakuum-Einstein-Gleichungen:

$$U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{,\rho} + U_{,\zeta\zeta} = -\frac{e^{4U}}{2\rho^2}(a_{,\rho}^2 + a_{,\zeta}^2) \quad (1)$$

$$\left(e^{4U} \frac{a_{,\rho}}{\rho} \right)_{,\rho} + \left(e^{4U} \frac{a_{,\zeta}}{\rho} \right)_{,\zeta} = 0 \quad (2)$$

$$k_{,\rho} = \rho(U_{,\rho}^2 - U_{,\zeta}^2) - \frac{e^{4U}}{4\rho}(a_{,\rho}^2 - a_{,\zeta}^2), \quad k_{,\zeta} = 2\rho U_{,\rho} U_{,\zeta} - \frac{e^{4U}}{2\rho} a_{,\rho} a_{,\zeta} \quad (3)$$

→ k kann als Linienintegral aus U und a berechnet werden

- (2) kann gelöst werden durch Einführung einer Fkt. b gemäß

$$a_{,\rho} = \rho e^{-4U} b_{,\zeta}, \quad a_{,\zeta} = -\rho e^{-4U} b_{,\rho}$$

wegen $a_{,\rho\zeta} = a_{,\zeta\rho}$ genügt b den Gln.

$$(\rho e^{-4U} b_{,\rho})_{,\rho} + (\rho e^{-4U} b_{,\zeta})_{,\zeta} = 0 \quad (4)$$

- (1) und (4) sind einer komplexen Gleichung äquivalent:

$$\Re f \left(f_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_{,\rho} + f_{,\zeta\zeta} \right) = f_{,\rho}^2 + f_{,\zeta}^2$$

Ernst-Gleichung

mit $f := e^{2U} + ib$: Ernst-Potential

- Randbedingungen

– im Unendlichen \mathcal{C} : asymptotisch flache Raumzeit

$$\Rightarrow U \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0, \quad f \rightarrow 1 \quad \text{für } \rho^2 + \zeta^2 \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow ds^2 \rightarrow d\rho^2 + d\zeta^2 + \rho^2 d\varphi^2 - dt^2 \text{ (Minkowski)}$$

– Symmetrieachse \mathcal{A}^\pm : η verschwindet

$$\Rightarrow \eta^a \eta_a \equiv g_{ab} \eta^a \eta^b \equiv g_{\varphi\varphi} \equiv \rho^2 e^{-2U} - a^2 e^{2U} = 0 \quad \Rightarrow a = 0$$

elementare Flachheit (Umfang U_0 und Radius r eines infinitesimalen Kreises erfüllen

$$U_0 = 2\pi r) \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

– Oberfläche \mathcal{B} : spezielle Daten abhängig vom zentralen Objekt

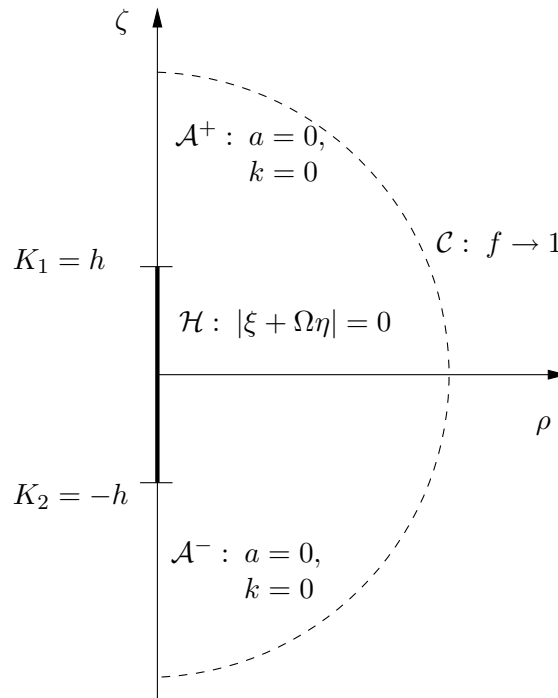
für ein zentrales schwarzes Loch ($\mathcal{B} = \mathcal{H}$: Ereignishorizont) folgt (Carter 1973):

\mathcal{H} ist *Killing-Horizont*, d.h. es gibt Normalenvektor χ^a zu \mathcal{H} , der Killing-Vektor ist und dessen Norm auf \mathcal{H} verschwindet

$$\text{o.B.d.A. } \chi^a = \xi^a + \Omega \eta^a, \quad |\xi^a + \Omega \eta^a|_{\mathcal{H}} = 0$$

(Ω : Winkelgeschwindigkeit des schwarzen Loches)

$$\Rightarrow \mathcal{H} : \quad \rho = 0, \quad K_1 \geq \zeta \geq K_2$$



- Lösung des Randwertproblems mit der *inversen Streumethode*
Idee:

- Ernst-Gleichung gehört zu bemerkenswerter Klasse von Differentialgleichungen für die ein zugeordnetes lineares Problem (LP) existiert, welches der ursprünglichen Gleichung äquivalent ist
(andere Beispiele:
Korteweg-de-Vries-Gl. $u_{,t} + 6uu_{,x} + u_{,xxx} = 0$,
Sinus-Gordon-Gl. $\phi_{,xx} - \phi_{,tt} = \sin \phi$)
- Lösung des LP entlang der Ränder \mathcal{A}^+ , \mathcal{C} , \mathcal{A}^- , \mathcal{H}
- Fortsetzung der Lösung zu allen ρ - ζ -Werten
- Berechnung des Ernst-Potentials f aus Lösung des LP
- Berechnung von U , a und k aus f

1.2 Das lineare Problem im statischen Fall

- Statik: $a \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow f = e^{2U}$

- Ernst-Gl.:

$$\Delta U \equiv U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{,\rho} + U_{,\zeta\zeta} = 0$$

- komplexe Koordinaten:

$$z := \rho + i\zeta, \quad \bar{z} := \rho - i\zeta$$

- LP:

$$\psi_{,z} = (1 + \lambda)A\psi, \quad \psi_{,\bar{z}} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{A}\psi$$

$\psi = \psi(z, \bar{z}, K)$ Pseudopotential, $K \in \mathbb{C}$ spektraler Parameter,
 $\lambda(z, \bar{z}, K) = \sqrt{\frac{K-i\bar{z}}{K+iz}}, \quad A = A(z, \bar{z})$

die Integrabilitätsbedingung $\psi_{,z\bar{z}} = \psi_{,\bar{z}z}$ impliziert:

$$A(z, \bar{z}) = U_{,z}, \quad \bar{A}(z, \bar{z}) = U_{,\bar{z}}, \quad \Delta U = 0$$

Berechnung von f :

$$f(\rho, \zeta) = \lim_{K \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 1} \psi(\rho, \zeta, K)$$

1.3 Ergebnisse

- Ernst-Potential eines rotierenden schwarzen Loches (Kerr-Lösung):

$$f(\rho, \zeta) = \frac{(h - ia)r_1 + (h + ia)r_2 - 2hM}{(h - ia)r_1 + (h + ia)r_2 + 2hM}$$

mit $r_{1/2} := \sqrt{(\zeta \pm h)^2 + \rho^2}$, $h^2 = M^2 - a^2$
 M : Masse, $a = J/M$: Drehimpuls pro Masse

- $f(\rho, \zeta) \rightarrow a(\rho, \zeta), \quad k(\rho, \zeta)$
- in Boyer-Lindquist-Koordinaten (r, θ, φ, t) mit

$$\rho^2 = \Delta \sin^2 \theta, \quad \zeta = (r - M) \cos \theta, \quad \Delta := r^2 - 2Mr + a^2$$

$$(\mathcal{A}^+ : \theta = 0, \quad \mathcal{A}^- : \theta = \pi, \quad \mathcal{H} : \Delta := 0, \quad r = M + \sqrt{M^2 - a^2})$$

$$ds^2 = \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2 - dt^2$$

Kerr-Lösung (Roy Kerr, 1963) in Boyer-Lindquist-Koordinaten (1967)

mit

$$\Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

statischer Grenzfall $a = 0$: Schwarzschild-Lösung in Schwarzschild-Koordinaten

1.4 Diskussion der Kerr-Lösung

- beschreibt rotierendes schwarzes Loch (aber nicht das Außenfeld eines beliebigen axisymmetrischen, stationären, rotierenden Sterns!)
- Lösung invariant bzgl. $t \rightarrow -t, a \rightarrow -a$
- $r \rightarrow \infty$: $\Sigma \sim r^2, \Delta \sim r^2 \quad ds^2 \rightarrow dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - dt^2$ (Minkowski) asymptotisch flache Raumzeit
- Lösung invariant bzgl. $t \rightarrow -t, a \rightarrow -a$
- in großer Entfernung:

$$g_{tt} = -1 + \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad g_{\varphi t} = -2J\frac{\sin^2\theta}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

→ in ART: J kann im Fernfeld abgelesen werden

- spezielle Hyperflächen:

(1) $\Delta = 0$:

$$r = r_{\pm} := M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

→ Koordinatensingularitäten (für $a \neq 0, a = 0: r_+ = 2M, r_- = 0$)

→ r_+ : Ereignishorizont (existiert nur für $|a| \leq M$, anderenfalls: nackte Singularität; Hypothese der kosmischen Zensur: im Universum existieren keine nackten Singularitäten außer der Urknall-Singularität)

(2) $\Sigma = 0$:

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

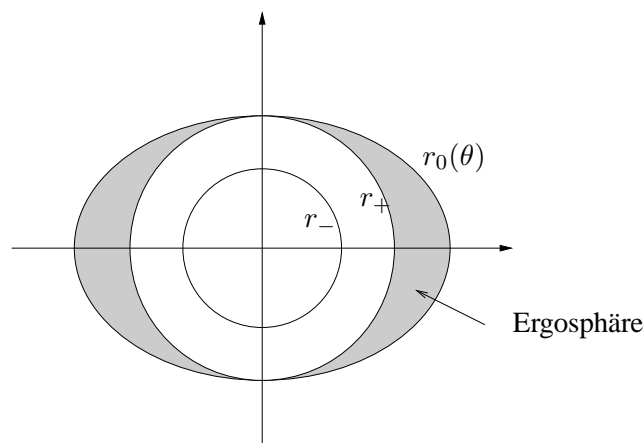
Kretschmann-Skalar $R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{\Sigma^6}(r^2 - a^2 \cos^2\theta)(\Sigma^2 - 16a^2r^2 \cos^2\theta) \rightarrow \infty$

→ „physikalische“ Singularität (Ring-Singularität)

(3) $0 = |\xi|^2 \equiv g_{ab}\xi^a\xi^b \equiv g_{tt} \equiv -1 + \frac{2Mr}{\Sigma}$:

$$r = r_0(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta} \quad (\text{größere Wurzel})$$

→ Grenzfläche der Stationarität



- reguläre Koordinaten: ersetze (φ, t) durch (Φ, v) mit

$$d\Phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr, \quad dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr$$

$$ds^2 = \Sigma d\theta^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\Phi + 2dr dv + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] d\Phi^2 - \frac{4M}{\Sigma} r a \sin^2 \theta d\Phi dv - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dv^2$$

Kerr-Koordinaten

$(\theta, v, \Phi) = \text{const.}$: einlaufende Null-Geodätische

für $a = 0$: Schwarzschild-Lösung in (einlaufenden) Eddington-Finkelstein-Koordinaten

$$ds^2 = 2dr dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 \quad (\Phi = \varphi)$$

1.5 Die Ergosphäre

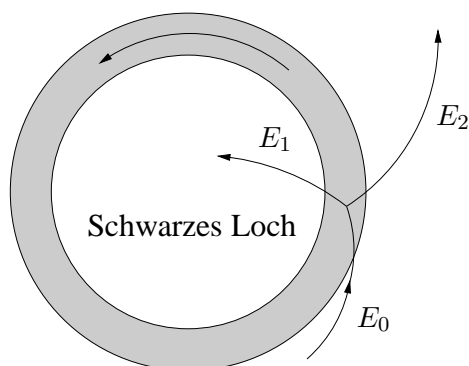
- Gebiet zwischen $r = r^+$ und $r = r_0(\theta)$ (existiert nur für $a \neq 0$)
- Killing-Vektor ξ raumartig, d.h. $|\xi|^2 = g_{tt} > 0$
(zeitartige Linearkombination von ξ und η existiert jedoch)
- $g_{tt} > 0 \Rightarrow$ keine zeit- oder lichtartige Weltlinie möglich mit $r = \text{const.}, \theta = \text{const.}, \varphi = \text{const.}$ (keine statischen Beobachter):

$$ds^2 = \underbrace{g_{rr}}_{>0} dr^2 + \underbrace{g_{\theta\theta}}_{>0} d\theta^2 + \underbrace{g_{\varphi\varphi}}_{>0} d\varphi^2 + \underbrace{g_{tt}}_{>0} dt^2 + 2g_{\phi t} d\varphi dt \stackrel{!}{\leq} 0$$

$$\Rightarrow ad\varphi > 0$$

\rightarrow Teilchen (Beobachter) rotieren notwendigerweise mit dem schwarzen Loch

- Teilchen und Lichtstrahlen können in Ergosphäre eindringen und sie auch wieder verlassen
- Penrose-Prozeß (Penrose 1969): Energieentnahme aus einem rotierenden schwarzen Loch



Teilchen (mit Energie E_0) dringt in Ergosphäre ein, zerfällt in zwei Bruchstücke, 1 Teilchen (Energie E_1) fällt ins schwarze Loch, 1 Teilchen (Energie E_2) entkommt

- Teilchen mit Masse m : $E = -p_a \xi^a \equiv -m u_a \xi^a$ (erhalten entlang von Geodätischen)
- lokale Energie-Impuls-Erhaltung: $p_0^a = p_1^a + p_2^a \Rightarrow E_0 = E_1 + E_2$
- außerhalb Ergosphäre: $E_0 > 0, E_2 > 0$ (ξ zeitartig)

- innerhalb Ergosphäre: $E_1 < 0$ möglich (ξ raumartig)

$$\Rightarrow E_2 = E_0 - E_1 = E_0 + |E_1| > E_0$$

- Ergebnis für schwarzes Loch: $M \rightarrow M - |E_1|, J$ nimmt ab
- Prozeß nur möglich bis $J = 0$, maximal können 29% der Energie extrahiert werden:

$$\text{Drehimpuls eines Teilchens: } J = p^a \eta_a$$

für Teilchen 1 beim Eintritt ins schwarze Loch: ($\xi + \Omega \eta$ lichtartig auf \mathcal{H} , p_1 zukunftsgerichtet und zeitartig) $\Rightarrow 0 > p_1^a (\xi_a + \Omega \eta_a) = -E_1 + \Omega J_1$

$$\Rightarrow J_1 < \frac{E_1}{\Omega} < 0 \quad (E_1 < 0, \text{ o.B.d.A. } \Omega > 0)$$

für das schwarze Loch gilt:

$$\delta M = E_1 < 0, \quad \delta J = J_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \delta J < \frac{\delta M}{\Omega}, \quad (\Omega = \frac{a}{2Mr^+})$$

bzgl. der irreduziblen Masse (Christodoulou 1970)

$$M_{\text{irr}}^2 := \frac{1}{2} \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \delta M_{\text{irr}} > 0$$

$$\Rightarrow M^2 = M_{\text{irr}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{irr}}^2} \geq M_{\text{irr}}^2 > M_{\text{irr},A}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{M_A - M_B}{M_A} &< 1 - \frac{M_{\text{irr},A}}{M_A} \\ &= 1 - \frac{1}{M_A} \sqrt{\frac{1}{2} (M_A^2 + \sqrt{M_A^4 - J_A^2})} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{J_A^2}{M_A^4}} \right)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,29 \end{aligned}$$

maximaler Energieverlust für $J_A = M_A^2$ ($a_A = M_A$): extreme Kerr-Lösung

2 Das Cauchy-Problem in der ART

2.1 Einführungsbeispiel: klassische Elektrodynamik

- Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(\vec{E} : elektrische Feldstärke, \vec{B} : magnetische Flußdichte, \vec{D} : elektrische Flußdichte, \vec{H} : magnetische Feldstärke, ρ : Ladungsdichte, \vec{j} : elektrische Stromdichte)

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

- homogene, lineare Materie: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ mit $\varepsilon = \text{const.}$ (Permittivität), $\mu = \text{const.}$ (Permeabilität):

$$\varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- 2 Gln. ohne Zeitableitungen (Zwangsbedingungen),
2 Gln. mit Zeitableitungen (Zeitentwicklungsgleichungen)
- Anfangsdaten (\vec{E} , \vec{B} bei $t = 0$) müssen Zwangsbedingungen erfüllen, die Zeitentwicklungsgleichungen (zusammen mit Gleichungen für die Materie) legen Felder für $t > 0$ fest
- Zwangsbedingungen automatisch erfüllt für $t > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \nabla \cdot \vec{E} - \rho) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} - \vec{j} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$$

2.2 Blätterung der Raumzeit

- Zerlegung von (M, g_{ab}) in Familie sich nicht überschneidender, raumartiger, 3-dim. Hyperflächen Σ
- die Zeitschnitte Σ sind (zumindest lokal) Äquipotentialflächen einer skalaren Funktion t („Koordinatenzeit“): $t(x^a) = \text{const.}$ auf Σ
- Σ raumartig $\Rightarrow |(t, a)|^2 = g^{ab} t, a t, b = g^{ab} \nabla_a t \nabla_b t =: -\frac{1}{\alpha^2} < 0, \quad \alpha > 0$: lapse-Funktion

- zeitartiger Normaleneinheitsvektor n^a :

$$n_a := -\alpha t_{,a}, \quad n^a = -\alpha g^{ab} t_{,b}, \quad n_a n^a = -1$$

neg. Vorzeichen, damit n^a in Richtung wachsender t -Werte zeigt
 $(t(x^a + \varepsilon n^a) - t(x^a)) = t_{,a} \varepsilon n^a + O(\varepsilon^2) = \frac{\varepsilon}{\alpha} + O(\varepsilon^2) > 0$

- induzierte *räumliche Metrik* auf Hyperflächen Σ :

$$\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$$

- jeder 4-dim. Tensor kann zerlegt werden in:

a) räumlicher Anteil („lebt“ in Σ) ergibt sich durch Überschieben mit Projektionstensor

$$\gamma^a_b = \delta^a_b + n^a n_b \quad (\Rightarrow \gamma^a_b n^b = 0)$$

b) zeitlicher Anteil (parallel zu n^a) durch Überschieben mit

$$N^a_b = -n^a n_b \quad (\Rightarrow N^a_b n^b = n^a)$$

- Definition der *3-dim. kovarianten Ableitung*:

$$D_a T^b_c := \gamma_a^d \gamma_e^b \gamma_c^f \nabla_d T^e_f$$

\Rightarrow mit räumlicher Metrik kompatibel: $D_a \gamma_{bc} = 0$

kann mittels der 3-dim. Zusammenhangskoeffizienten (Christoffel-Symbole) ausgedrückt werden

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} \gamma^{ad} (\gamma_{db,c} + \gamma_{dc,b} - \gamma_{bc,d})$$

- *3-dim. Riemann-Tensor* definiert durch

$$2D_{[a} D_{b]} w_c = R^d_{cba} w_d, \quad R^d_{cba} n_d = 0$$

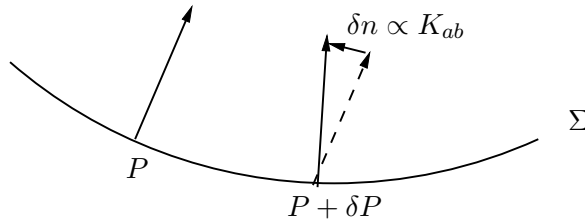
Explizite Formel: $R^d_{abc} = \Gamma^d_{ac,b} - \Gamma^d_{bc,a} + \Gamma^e_{ac} \Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{bc} \Gamma^d_{ea}$

- *Ricci-Tensor*: $R_{ab} = R^c_{acb}$
- *Krümmungsskalar*: $R = R^a_a$
- Definition der *äußeren Krümmung*:

$$K_{ab} := -\gamma_a^c \gamma_b^d \nabla_{(c} n_{d)} \equiv -\gamma_a^c \nabla_c n_b \equiv -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{ab}$$

– K_{ab} ist räumliches Objekt, per Konstruktion symmetrisch

- beschreibt, wie Blatt Σ in Raumzeit M eingebettet ist



- beschreibt eine Art Zeitableitung von γ_{ab}
- Spur: $K := g^{ab}K_{ab} = -\nabla_a n^a$

- Projektionen des 4-dim. Riemann-Tensors:

$$\gamma_a^p \gamma_b^q \gamma_c^r \gamma_d^s {}^{(4)}R_{pqrs} = R_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc} \quad (\text{Gauß-Gleichung})$$

$$\gamma_b^r \gamma_a^p \gamma_c^q \gamma_d^s {}^{(4)}R_{rpqs} = D_a K_{bc} - D_b K_{ac} \quad (\text{Codazzi-Gleichung})$$

$$n^d n^c \gamma_a^q \gamma_b^r {}^{(4)}R_{rdqc} = \mathcal{L}_n K_{ab} + \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha + K_b^c K_{ac} \quad (\text{Ricci-Gleichung})$$

2.3 Die ADM-Gleichungen (Arnowitt, Deser, Misner 1962)

- Ziel: Berechnung von Projektionen der Einsteingleichungen

$${}^4R_{ab} - \frac{1}{2} {}^{(4)}R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (G = c = 1)$$

in Σ und in Richtung von n

- zweifaches Überschieben der Gauß-Gl. mit der räumlichen Metrik ergibt:

$$R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi\rho \quad (\text{Hamiltonsche Zwangsbedingung})$$

$\rho := n^a n^b T_{ab}$: Energiedichte (gemessen von einem Normalen-Beobachter n^a)

- Überschieben der Codazzi-Gl. mit der räumlichen Metrik:

$$D_b K_a^b - D_a K = 8\pi j_a \quad (\text{Impuls-Zwangsbedingung})$$

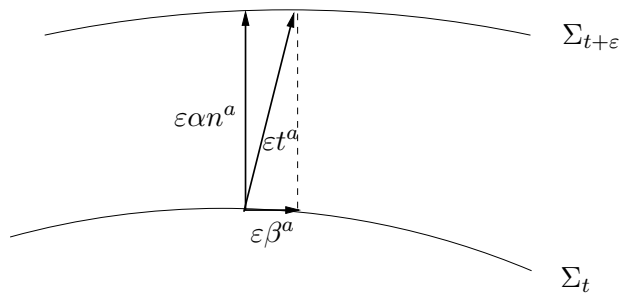
$j_a := -\gamma_a^b n^c T_{bc}$: Impulsstromdichte, Massenstromdichte

- beide Zwangsbedingungen beinhalten nur räumliche Größen und deren räumliche Ableitungen
- müssen in jedem individuellen Blatt Σ erfüllt sein
- wir benötigen Zeitentwicklungsgleichungen die beschreiben, wie sich γ_{ab} , K_{ab} mit der Zeit ändern (von einem Blatt Σ zum nächsten)

- definiere Vektor

$$t^a = \alpha n^a + \beta^a,$$

wobei der *shift-Vektor* β^a räumlich ist ($\beta^a n_a = 0$); t^a erfüllt $t^a \nabla_a t = 1$



- alle infinitesimalen Vektoren ϵt^a , die auf demselben Blatt Σ_t beginnen, enden auch auf einem einheitlichen Blatt $\Sigma_{t+\epsilon}$
- lapse α und shift β^a bestimmen zusammen, wie sich die Koordinaten von Blatt zu Blatt ändern
- Umschreiben von $K_{ab} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n\gamma_{ab}$ ergibt Zeitentwicklungsgleichung für γ_{ab}

$$\mathcal{L}_t\gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + \mathcal{L}_\beta\gamma_{ab}$$

- Kombination der Ricci-Gl. mit den Einstein-Gln. und der Gauß-Gl. führt auf Zeitentwicklungsgleichung für K_{ab}

$$\mathcal{L}_t K_{ab} = -D_a D_b \alpha + \alpha (R_{ab} - 2K_{ac} K_b^c + K K_{ab}) - 8\pi\alpha \left[S_{ab} - \frac{1}{2}(S - \rho)\gamma_{ab} \right] + \mathcal{L}_\beta K_{ab}$$

wobei

$$S_{ab} := \gamma_{ac}\gamma_{bd}T^{cd}, \quad S := \gamma^{ab}S_{ab}$$

- Zeitentwicklungsgleichungen garantieren Erfüllung der Zwangsbedingungen (wie in der Elektrodynamik): wenn Zwangsbedingungen am Anfang erfüllt sind, dann sind sie auch auf jedem zukünftigen Blatt erfüllt

- an 3 + 1-Zerlegung der Raumzeit angepaßtes Koordinatensystem:

- Einführung räumlicher Basisvektoren e_i , $i = 1, 2, 3$, die die Hyperflächen Σ aufspannen, $n_a(e_i)^a = 0$
- 4. Basisvektor: $e_4 = (t^a) = (0, 0, 0, 1)$
- Konsequenz: 4. kontravariante Komponente jedes räumlichen Vektors verschwindet, z.B.

$$(\beta^a) = (\beta^i, 0)$$

- Normalenvektor:

$$(n^a) = \frac{1}{\alpha}(-\beta^i, 1), \quad (n_a) = (0, 0, 0, -\alpha)$$

$$(\text{Def. von } t^a) \quad (t \text{ als 4. Koordinate, } n_a = -\alpha t_{,a})$$

– Linienelement:

$$ds^2 = \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) - \alpha^2 dt^2, \quad g_{ij} = \gamma_{ij}$$

– Zwangsbedingungen und Zeitentwicklungsgleichungen bzgl. räumlicher Komponenten:

Hamiltonsche Zwangsbedingung:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho$$

Impuls-Zwangsbedingung:

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i$$

Entwicklungsgleichung für räumliche Metrik:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i$$

Entwicklungsgleichung für äußere Krümmung:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha(R_{ij} - 2K_{ik}K^k_j + K K_{ij}) - 8\pi\alpha \left(S_{ij} - \frac{1}{2}(S - \rho)\gamma_{ij} \right) \\ & + \beta^k D_k K_{ij} + K_{ik} D_j \beta^k + K_{kj} D_i \beta^k \end{aligned}$$

• Anmerkungen

- Blätterung der Raumzeit in 3-dim. raumartige Schnitte, parametrisiert durch t
- auf jedem Blatt sind eine 3-dim. Metrik γ_{ij} und eine 3-dim. äußere Krümmung K_{ij} definiert
- Anfangsblatt: Vorschreiben dieser Tensoren derart, daß Zwangsbedingungen erfüllt sind (unterbestimmtes elliptisches Gleichungssystem)
- Zeitentwicklungsgleichungen bestimmen weitere Entwicklung von γ_{ij} und K_{ij} (derart, daß Zwangsbedingungen weiterhin erfüllt sind), jedoch nicht Entwicklung von lapse α und shift β^i
 → α und β^i stellen die Eichfreiheitsgrade der ART dar (bestimmen, wie sich Koordinaten von Blatt zu Blatt entwickeln)
- Cauchy-Problem (Anfangswertproblem): Konstruktion von (M, g_{ab}) aus $(\Sigma_0, \gamma_{ij}, K_{ij})$

3 Einfache Neutronensternmodelle: sphärisch-symmetrische Sterne

- *Birkhoff-Theorem*: Das äußere, asymptotisch flache Vakuumfeld einer beliebigen kugelsymmetrischen Materieverteilung (z.B. kollabierender oder expandierender Stern) wird durch die Schwarzschild-Lösung beschrieben.

3.1 Linienelement und Energie-Impuls-Tensor

- jede kugelsymmetrische Metrik kann in die Form

$$ds^2 = AdR^2 + B(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2CdRdT - DdT^2$$

gebracht werden, wobei A, B, C, D Funktionen von R und T sind

- Koordinatentransformation:

$$(1) r = \sqrt{B} \Rightarrow ds^2 = E dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2F drdT - GdT^2$$

$$(2) dt = H(GdT - Fdr) \quad (H: \text{integrierender Faktor})$$

$$\Rightarrow dt^2 = H^2[G(GdT^2 - 2FdrdT) + F^2dr^2]$$

- Ergebnis:

$$ds^2 = e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\nu dt^2$$

- statischer Stern:

$$\lambda = \lambda(r), \nu = \nu(r)$$

Vierergeschwindigkeit: $(u^a) = (0, 0, 0, e^{-\nu/2})$, $u^a u_a = -1$
(Materie ruht im gewählten Bezugssystem)

- Energie-Impuls-Tensor des idealen fluiden Mediums:

$$T_{ab} = (\mu + p)u_a u_b + p g_{ab}$$

p : Druck, μ : Energiedichte

3.2 Feldgleichungen

- Einstein-Gleichungen

$$R_b^a - \frac{1}{2} R g_b^a = 8\pi T_b^a$$

- nicht-triviale Komponenten:

$$a = b = 1 : \quad e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p \quad (5)$$

$$a = b = 2 : \quad e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) = 8\pi p \quad (6)$$

$$a = b = 4 : \quad -e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\mu \quad (7)$$

- Konsequenz der Feldgleichungen (Bianchi-Identität): $T^{ab}{}_{;b} = 0$

$$\Rightarrow \quad p' = -\frac{\nu'}{2}(\mu + p) \quad (8)$$

→ kann anstelle einer der Feldgleichungen benutzt werden (hier: anstelle (6))

- die 3 Feldgleichungen bestimmen zusammen mit einer Zustandsgleichung $f(p, \mu) = 0$ die 4 Funktionen ν , λ , p und μ

3.3 Die TOV-Gleichung

- Lösung von (7):

$$(7) \quad \Rightarrow \quad 8\pi\mu r^2 = 1 - (e^{-\lambda}r)' \quad \Rightarrow \quad re^{-\lambda} = r - 2m(r) + C, \quad C = \text{const.}$$

mit der *Massenfunktion*

$$m(r) := 4\pi \int_0^r \mu(x)x^2 dx$$

Auswertung bei $r = 0$ ergibt $C = 0$ (für beschränkte λ)

Ergebnis:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \quad (9)$$

- Gleichung für p :

$$(5) \quad \Rightarrow \quad \nu' = (1 + 8\pi pr^2) \frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r} \stackrel{(9)}{=} \frac{1 + 8\pi pr^2}{r - 2m} - \frac{1}{r}$$

Einsetzen in (8):

$$\boxed{p' = -\frac{(p + \mu)(4\pi pr^3 + m)}{r(r - 2m)} \equiv -\frac{m}{r^2} \mu \left(1 + \frac{p}{\mu}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}}$$

TOV-Gleichung (Tolman, Oppenheimer, Volkov 1939)

- Newtonsche Theorie:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{r^2}(r^2 U')' = 4\pi\mu \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{m(r)}{r^2}$$

Euler-Gleichung:

$$\nabla p = -\mu \nabla U \quad \Rightarrow \quad p' = -\frac{m}{r^2}\mu$$

3.4 Die innere Schwarzschild-Lösung

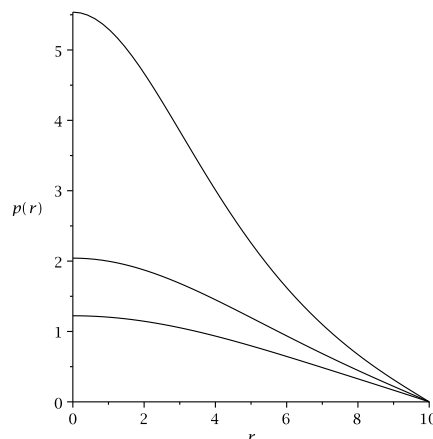
- besonders einfache Zustandsgleichung: $\mu = \text{const.}$
- führt auf:

$$m(r) = \frac{A}{2}r^3, \quad A := \frac{8\pi}{3}\mu$$

$$\stackrel{(9)}{\Rightarrow} e^{-\lambda(r)} = 1 - Ar^2$$

- Lösung der TOV-Gleichung:

$$p(r) = \frac{\mu}{3} \cdot \frac{3c\sqrt{1 - Ar^2} - 1}{1 - c\sqrt{1 - Ar^2}}, \quad c = \text{const.}$$



- Berechnung von ν aus Gleichung für ν' :

$$\nu' = \frac{1 + 8\pi p r^2}{r - 2m} - \frac{1}{r} = \frac{2Acr}{(1 - c\sqrt{1 - Ar^2})\sqrt{1 - Ar^2}}$$

Integration ergibt:

$$\nu = 2 \ln(1 - c\sqrt{1 - Ar^2}) + d, \quad d = \text{const.}$$

- Berechnung der Konstanten mit Übergangsbedingungen an der Sternoberfläche $r = r_0$

$$(i) \quad p(r_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3\sqrt{1 - Ar_0^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \mu \frac{\sqrt{1 - Ar^2} - \sqrt{1 - Ar_0^2}}{3\sqrt{1 - Ar_0^2} - \sqrt{1 - Ar^2}}}$$

(ii) Stetigkeit λ :
Außenraum:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \quad \Rightarrow \quad e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{2M}{r_0}} = \frac{1}{1 - Ar_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{1}{2}Ar_0^3 = m(r_0)}$$

(iii) Stetigkeit von ν :

$$\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) = \frac{4}{9}e^d \quad \Rightarrow \quad e^d = \frac{9}{4}(1 - Ar_0^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^\nu = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - Ar_0^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - Ar^2}\right]^2}$$

- Anmerkung: in geeigneten Koordinaten sind die metrischen Potentiale und deren Normalen- (r -) Ableitungen stetig — in unseren Koordinaten ist jedoch λ' unstetig

- *Buchdahl-Limes*

- Druck $p(r)$ fällt monoton vom Zentrum zur Oberfläche hin
- Zentraldruck

$$p(0) = \mu \frac{1 - \sqrt{1 - Ar_0^2}}{3\sqrt{1 - Ar_0^2} - 1}$$

ist endlich und positiv nur für

$$3\sqrt{1 - Ar_0^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad Ar_0^2 < \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_0 > \frac{9}{4}M = \frac{9}{8} \cdot 2M}$$

- reguläre Innenlösung existiert nur für hinreichend großen Sternradius
- Gültigkeit derselben Ungleichung kann für beliebige vernünftige Zustandsgleichungen ($\mu'(r) \leq 0$) gezeigt werden
- ein Stern mit $r_0 < \frac{9}{4}M$ kollabiert unvermeidlich

3.5 Allgemeine Zustandsgleichung

- Zustandsgleichung: $p = p(\mu)$
- im Allgemeinen nur numerische Lösung möglich
- möglicher Algorithmus:

$$1. \quad m(r) = cr^3 + O(r^4) \quad \rightarrow \quad \text{Einführung der Hilfsfunktion } \tilde{m}(r) = \frac{m(r)}{r^3}$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi\mu = 3\tilde{m} + r\tilde{m}'$$

Ersetzen von μ und $p(\mu)$ durch \tilde{m} in TOV-Gl.
 \rightarrow gewöhnliche Differentialgl. 2. Ordnung für \tilde{m}

- Wahl der Anfangsparameter:
 - $\tilde{m}(0)$ (oder $p(0)$ oder $\mu(0)$)
 - $\tilde{m}'(0) = 0$ (TOV $\Rightarrow p'(0) = 0 \Rightarrow \mu'(0) = 0 \Rightarrow \tilde{m}'(0) = 0$)
 - Löse Gl. für \tilde{m} , z.B. mittels Runge-Kutta-Methode
 $\rightarrow \tilde{m}(r) \rightarrow m(r) \rightarrow \mu(r) \rightarrow p(r)$
 - berechne $\lambda(r)$ gemäß $e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$
 - Löse Gl. für $\nu(r)$, Integrationskonstante folgt aus stetigem Übergang zur äußeren Schwarzschild-Lösung
- Bsp.: Relativistische Polytrope

$$p = K\mu_B^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n} = \text{const.}, \quad n > 0$$

mit $\mu_B := \mu - np$: baryonische Massendichte,
 K : Polytropenkonstante, γ : Polytropenexponent, n : Polytropenindex
 \rightarrow Neutronensterne werden gut modelliert mit n zwischen 0,5 und 1

3.6 Die Buchdahl-Grenze im allgemeinen Fall

- Gleichungen für kugelsymmetrische Sterne:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{10}$$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \mu(x)x^2 dx \tag{11}$$

$$p' = -\frac{\nu'}{2}(\mu + p) \tag{12}$$

$$\nu' = \frac{1 + 8\pi pr^2}{r - 2m} - \frac{1}{r} \tag{13}$$

- Annahme: $\mu'(r) \leq 0$
- Stetigkeit von λ bei $r = r_0$: $m(r_0) = M$
- Ersetzen von ν durch $f(r) := e^{\frac{\nu(r)}{2}}$, Eliminieren von p in (12) mittels (13):

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \frac{df}{dr} \right) = \frac{f}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \frac{d}{dr} \left(\frac{m}{r^3} \right) \leq 0, \quad (14)$$

denn (partielle Integration)

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \mu(x) x^2 dx = \frac{4\pi}{3} \left(\mu r^3 - \int_0^r \mu'(x) x^3 dx \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{m}{r^3} \right) = \frac{m'}{r^3} - \frac{3m}{r^4} = \frac{4\pi\mu}{r} - \frac{3m}{r^4} = \frac{4\pi}{r^4} \int_0^r \underbrace{\mu'(x)}_{\leq 0} x^3 dx \leq 0$$

- Integration von (14) von r bis r_0 , Verwenden der Stetigkeit von ν' bei $r = r_0$, d.h.

$$f(r_0) = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}, \quad f'(r_0) = \frac{M}{r_0^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}}$$

liefert

$$f'(r) \geq \frac{Mr}{r_0^3 \sqrt{1 - 2m/r_0}}$$

- Integration von $r = 0$ bis $r = r_0$:

$$f(0) \leq \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}} - \frac{M}{r_0^3} \int_0^{r_0} \frac{r dr}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}$$

- m/r^3 monoton fallend $\Rightarrow m/r^3 \geq M/r_0^3$
- damit Abschätzen des Integranden

$$0 < f(0) \leq \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{r_0 > \frac{9}{8} \cdot 2M}$$

4 Der sphärisch-symmetrische Gravitationskollaps

- Entwicklung eines kugelsymmetrischen Sternes:
 - falls genug Masse abgestoßen werden kann
 → weißer Zwerg ($M \lesssim 1,46M_\odot$ Chandrasekhar-Grenze) oder Neutronenstern ($M \lesssim 1,5 \dots 3M_\odot$)
 - ansonsten:
 kein stabiler Endzustand als Stern (Druck kann Gravitationsanziehung nicht kompensieren)
 Stern schrumpft unter seinen Schwarzschild-Radius $r = 2M$ und weiter bis $r = 0$
 → Gravitationskollaps zum schwarzen Loch

4.1 Linienelement und Energie-Impuls-Tensor

- kugelsymmetrisches Linienelement:

$$ds^2 = e^{\lambda(r,t)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - e^{\nu(r,t)} dt^2$$

- einfaches Materiemodell: Staub ($p = 0$)

$$T^{ab} = \mu u^a u^b$$

⇒ Staubteilchen bewegen sich entlang von Geodätischen

- Transformation auf mitbewegte Koordinaten:

$$(u^a) = (u^r, 0, 0, u^t), \quad u^a u_a = -1, \quad u_{a;b} u^b = 0$$

$$\Rightarrow (u_{a;b} - u_{b;a}) u^b = 0$$

$$\Rightarrow u_{r,t} - u_{t,r} = 0 \quad \Rightarrow u_a = -\tau_{,a}, \quad \tau = \tau(r, t)$$

neue Koordinaten: $(x^a) = (\rho, \theta, \varphi, \tau)$ mit $\rho = \rho(r, t)$, $\tau = \tau(r, t)$, wobei

$$\rho_{,r} = \alpha e^\lambda \tau_{,t}, \quad \rho_{,t} = \alpha e^\nu \tau_{,r}$$

($\alpha = \alpha(r, t)$): integrierender Faktor)

neue Vierergeschwindigkeit:

$$\boxed{(u^a) = (0, 0, 0, 1), \quad (u_a) = (0, 0, 0, -1)}$$

neues Linienelement:

$$\boxed{ds^2 = e^{l(\rho,\tau)} d\rho^2 + r^2(\rho, \tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - d\tau^2}$$

4.2 Feldgleichungen

- Einstein-Gleichungen $R_b^a - \frac{1}{2}R\delta_b^a = 8\pi T_b^a$ mit $T_\tau^\tau = -\mu$, ansonsten: $T_b^a = 0$

$$R_1^1 - \frac{R}{2} = \frac{r'^2}{r^2}e^{-l} - \frac{2\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r} = 0 \quad (15)$$

$$R_2^2 - \frac{R}{2} = R_3^3 - \frac{R}{2} = \left(\frac{r''}{r} - \frac{r'l'}{2r}\right)e^{-l} - \frac{\dot{r}\dot{l}}{2r} - \frac{\ddot{l}}{2} - \frac{\dot{l}^2}{4} - \frac{\ddot{r}}{r} = 0 \quad (16)$$

$$R_4^4 - \frac{R}{2} = \left(\frac{2r''}{r} - \frac{r'l'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)e^{-l} - \frac{\dot{r}\dot{l}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = -8\pi\mu \quad (17)$$

$$R_4^1 = \frac{1}{r}e^{-l}(\dot{l}r' - 2\dot{r}') = 0 \quad (18)$$

- Lösung:

(i) (18): $\dot{l} = \frac{(r'^2)'}{r'^2} \Rightarrow e^l = c(\rho)r'^2 =: \frac{r'^2}{1 - \varepsilon f^2(\rho)}, \quad \varepsilon = 0, \pm 1$

- (ii) Einsetzen von e^l in (15):

$$\begin{aligned} 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 &= -\varepsilon f^2(\rho) \\ \Rightarrow 2r\dot{r}\ddot{r} + \dot{r}^3 &\equiv (r\dot{r}^2)' = -\varepsilon\dot{r}f^2(\rho) \equiv -[\varepsilon r f^2(\rho)]' \\ \Rightarrow \dot{r}^2 &= -\varepsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r} \end{aligned}$$

- (iii) mit den Ausdrücken für e^l und \dot{r}^2 :

(16) ist identisch erfüllt

(17) ergibt

$$\frac{F'}{r'r^2} = 8\pi\mu$$

- (iv) Integration von $\dot{r}^2 = -\varepsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r}$:

$$\varepsilon = 0: \quad \tau = \tau_0(\rho) \pm \frac{2r^{3/2}(\rho, \tau)}{3F^{1/2}(\rho)}$$

$\varepsilon = \pm 1$: verwende neue Koordinate η statt τ : $d\eta = \frac{f}{r}d\tau$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{F}{f^2}r - \varepsilon r^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{F(\rho)}{2f^2(\rho)}h'(\eta), \quad \tau = \tau_0(\rho) \pm \frac{F(\rho)}{2f^3(\rho)}h(\eta), \quad h(\eta) = \begin{cases} \eta - \sin \eta, & \varepsilon = +1 \\ \sinh \eta - \eta, & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

- Ergebnis: Allgemeine kugelsymmetrische Staublösung

$$ds^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\right)^2 \frac{d\rho^2}{1 - \varepsilon f^2(\rho)} + r^2(\rho, \tau)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - d\tau^2, \quad \mu(\rho, \tau) = \frac{F'(\rho)}{8\pi r^2 r'}$$

Lemaître-Tolman-Bondi-Metrik (1933,34,49)

freie Funktionen: $f(\rho)$, $F(\rho)$, $\tau_0(\rho)$

4.3 Oppenheimer-Snyder-Kollaps

- einfachstes Kollapsszenario: μ unabhängig von ρ
- wähle

$$f(\rho) = \rho, \quad F(\rho) = \frac{8\pi}{3} \hat{M} \rho^3 \quad (\hat{M} = \text{const.}), \quad \tau_0(\rho) = 0$$

$$\Rightarrow r(\rho, \tau) = K(\tau)\rho, \quad \mu(\tau) = \frac{\hat{M}}{K^3(\tau)}$$

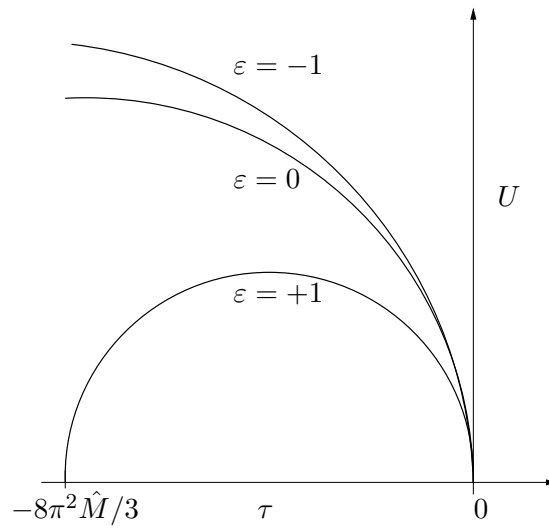
mit

$$K(\eta) = \frac{4\pi}{3} \hat{M} h'(\eta), \quad \tau = -\frac{4\pi}{3} \hat{M} h(\eta), \quad h(\eta) = \begin{cases} \eta - \sin \eta, & \varepsilon = +1 \\ \frac{\eta^3}{6}, & \varepsilon = 0 \\ \sinh \eta - \eta, & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

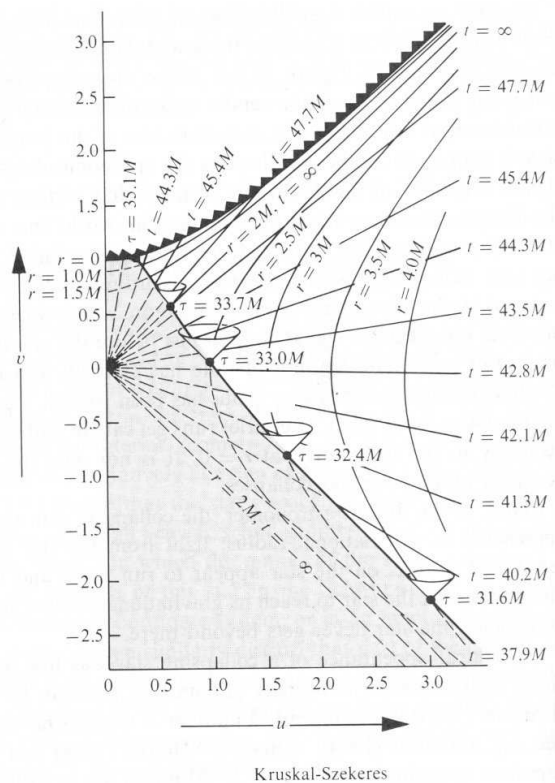
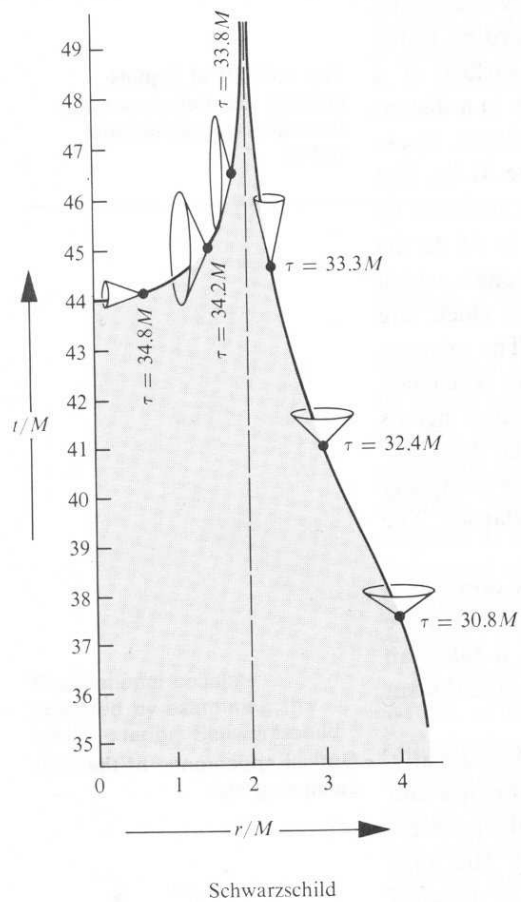
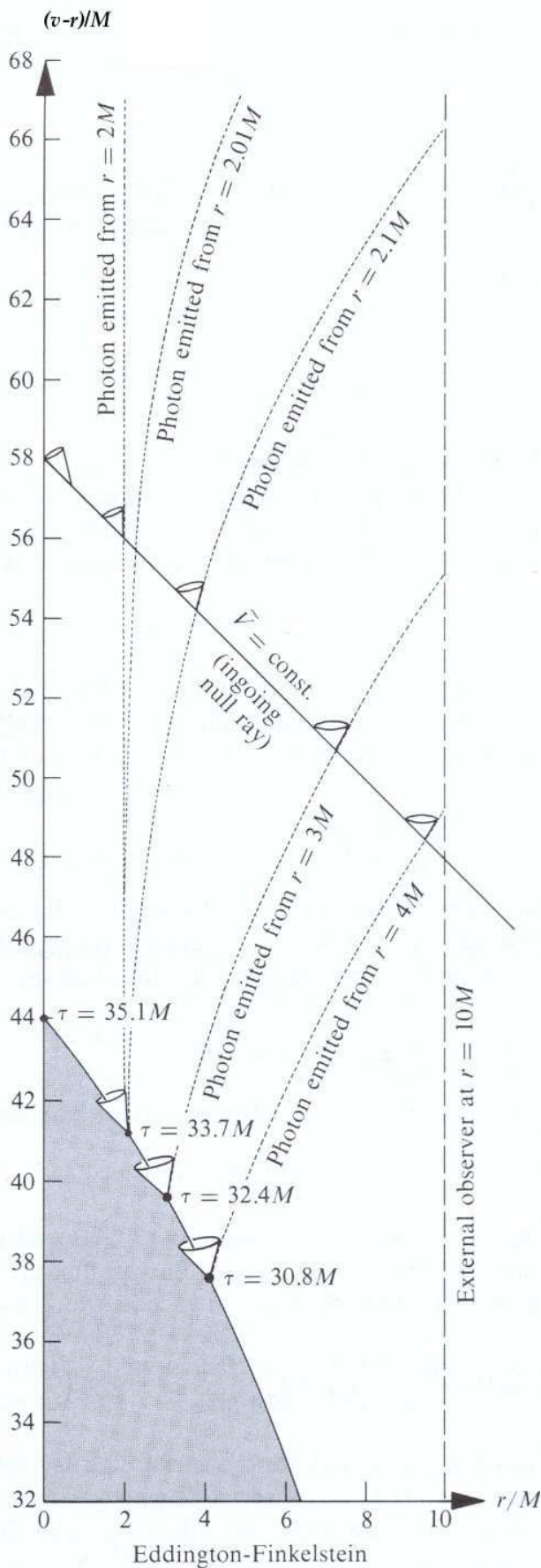
$$\Rightarrow ds^2 = K^2(\tau) \left[\frac{d\rho^2}{1 - \varepsilon \rho^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - d\tau^2$$

(für $\rho < \rho_0$ mit Sternradius ρ_0 ; Außenraum: Schwarzschild-Linienelement)

- Anmerkungen:
 - Schnitt $\tau = \text{constant}$: 3-dim. Raum konstanter Krümmung ${}^{(3)}R(\tau) = \frac{6\varepsilon}{K(\tau)}$
 - Lösung ist Teil des Friedmann-Kosmos — homogenes und isotropes kosmologisches Modell
 - Umfang des Sterns: $U = 2\pi K \rho_0$
 - zeitabhängig
 - Kollaps oder Expansion



- $\varepsilon = -1, \varepsilon = 0$: Radius nimmt stetig ab
- $\varepsilon = +1$ (Zykloide): Stern expandiert, erreicht Maximalgröße und kollabiert anschließend
- „realistisches“ Modell: $\varepsilon = +1$, Beginn beim Maximum (Stern anfänglich in Ruhe), anschließend Kollaps



Der Kollaps eines Sterns mit Anfangsradius $10M$, dargestellt in verschiedenen Koordinatensystemen.

[Aus Misner, Thorne and Wheeler, *Gravitation*, Freeman and Company, New York, 2002]